

# 矩阵的半张量积随想录之二： 计算机时代的数学

程代展

中国科学院数学与系统科学研究院  
聊城大学矩阵半张量积理论与应用研究中心

聊城大学数学学院

2022年10月13日 山东、聊城

# 主要内容

- 1 从连续数学到离散数学
- 2 有限值的矩阵半张量积表示
- 3 混合值动态系统
- 4 马尔科夫动态系统
- 5 有限自动机
- 6 小结

# 1. 从连续数学到离散数学

## 👉 数学发展的两套马车

- 公理化体系：古希腊欧几里得几何(逻辑推理).
- 机械化思想：中国应用导向, 寻找数值结论(算学).

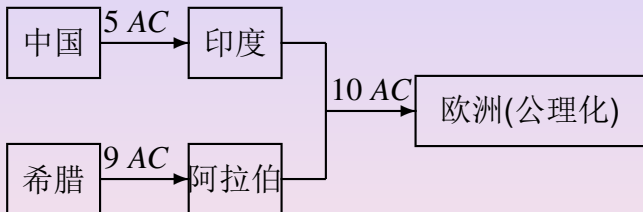


图 1: 数学起源

📖 [1] 吴文俊, 吴文俊论数学机械化, 山东教育出版社, 济南, 1995.

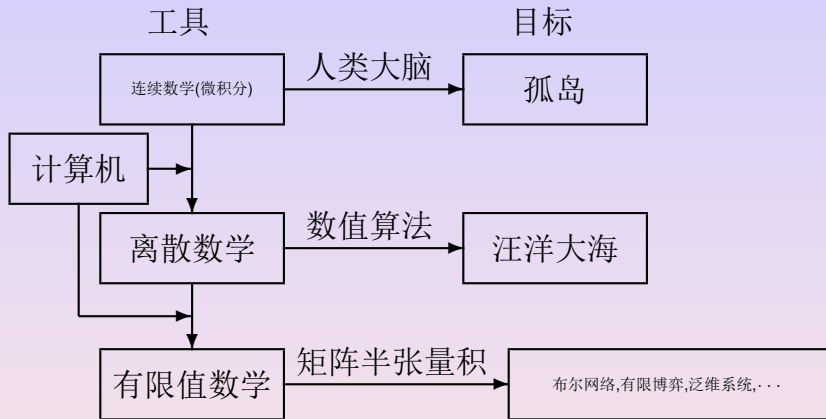



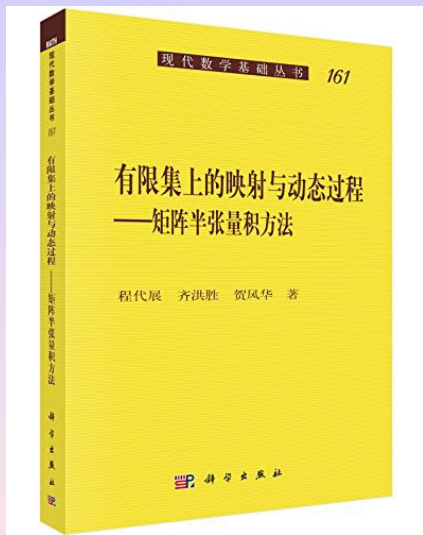
图 2: 从连续数学到离散数学

- 自从17世纪后期牛顿-莱布尼茨发明微积分开始，以微积分为代表的连续性数字在自然科学研究中起重要作用，在数学中占有统治地位. 计算机的出现和计算机科学的发展，正动摇微积分的统治地位[1].
- 把矩阵半张量积称为计算机时代的矩阵理论或矩阵算法，是有道理的[2].

 [1] 王树和，数学聊斋，科学出版社，北京，2008.

 [2] 程代展，齐洪胜，贺风华，有限集上的映射与动态过程-矩阵半张量积方法，科学出版社，北京，2015.

## 👉 从有限值映射看矩阵半张量积



## II. 有限值的矩阵半张量积表示

### ☞ 变量的向量形式

$$\Delta_n := \{\delta_n^i \mid i \in [1, n]\},$$

$$\Upsilon_n := \{p = (p_1, \dots, p_n)^T \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\},$$

$$\mathcal{B}^n := \{b = (b_1, \dots, b_n)^T \mid b_i \in \{0, 1\}\}.$$

### Definition 2.1

设  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ . 那么,

(i)  $X = i \in S$  可以表示为

$$\vec{X} := x = \delta_n^i,$$

称为  $X$  的向量表示.

## Definition 2.1(cont'd)

(ii) 设  $Z \subset S$ , 那么,

$$z = \vec{Z} \in \mathcal{B}^n$$

这里,

$$z(i) = \begin{cases} 1, & i \in Z, \\ 0, & \text{Otherwise.} \end{cases}$$

(iii) 设  $D \subset \bar{S}$  为  $S$  上的分布, 即  $D \in \Upsilon^n$ , 那么,

$$D(i) = \text{Prob}(i \in D) := p_i \geq 0,$$

这里,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$



👉 例：逻辑变量的表示

一个逻辑变量  $x$ ，它只能或真( $T = 1$ )或假( $F = 0$ )。则  $x \in \mathcal{D}$ ，这里， $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ 。

逻辑算子

(i) “非” ( $\neg$ ):

$$\neg(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x = 1. \end{cases} \quad (1)$$

(ii) “析取(或)”( $\vee$ ) 和“合取(与)”( $\wedge$ )。它们和其他一些二元逻辑算子的值用真值表表示，见表1。

## ☞ 真值表

表 1: 二元算子真值表

算子	:	析取(或)	合取(与)	蕴含	等价
$x$	$y$	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

逻辑变量的向量表示:

$$1 \sim \delta_2^1; \quad 0 \sim \delta_2^2.$$

逻辑表达式的代数表示:

在这种向量表示下:

$$\neg x = M_n x, \tag{2}$$

这里,

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} := \delta_2[2, 1]$$

称为“非”的结构矩阵.

对于二元算子 $\sigma$ , 也可以找到其相应的结构矩阵 $M_\sigma$ , 使得

$$x\sigma y = M_\sigma xy. \quad (3)$$

常用二元算子 $\sigma$  及其相应的结构矩阵列于表2.

**表 2:** 二元算子的结构矩阵

$\sigma$	$\vee(d)$	$\wedge(c)$	$\rightarrow(i)$	$\leftrightarrow(e)$
$M_\sigma$	$\delta_2[1, 1, 1, 2]$	$\delta_2[1, 2, 2, 2]$	$\delta_2[1, 2, 1, 1]$	$\delta_2[1, 2, 2, 1]$

## 👉 一个例子

### Example 2.2

- A 说B 撒谎,
- B 说C 撒谎,
- C 说A 和B 撒谎,

到底是谁撒谎? 谁是老实人?



代数表示使逻辑推理代数化, 即通过解代数方程的方式即可得到逻辑问题的解。

### Example 2.2 (cont'd)

设 $P$ : A 是老实人;  $Q$ : B 是老实人;  $R$ : C 是老实人. 则逻辑表达式为

$$(P \leftrightarrow \neg Q) \wedge (Q \leftrightarrow \neg R) \wedge (R \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q) = 1. \quad (4)$$

左式的代数表达式为

$$L(P, Q, R) = M_c M_c (M_e P M_n Q) (M_e Q M_n R) (M_e R M_c M_n P M_n Q)$$

## Example 2.2 (cont'd)

(4) 变为

$$L(P, Q, R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} PQR = \delta_2^1. \quad (5)$$

其解为  $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $R = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

即A与C撒谎, B为老实人。

## 👉 一组有限值变量的表示

定义

$$\Pi_i := \otimes_{s=1}^n J_s,$$

这里,

$$J_s = \begin{cases} \mathbf{1}_{n_i}^T, & s = i, \\ I_{n_s}, & s \neq i. \end{cases}$$

### Proposition 2.2

(i) 设  $x_i \in \Delta_{k_i}$  (或  $x_i \in \Upsilon_{k_i}$ ),  $i \in [1, n]$ , 则

$$\Pi_i \times_{s=1}^n x_s = x_i. \quad (6)$$

(ii) 设  $0 \neq x_i \in \mathcal{B}^{k_i}$ ,  $i \in [1, n]$ , 则

$$\Pi_i \times_{\mathcal{B}} \times_{s=1}^n x_s = x_i. \quad (7)$$



## Remark 2.3

(i)

$$x = \times_{i=1}^n x_i \in \mathbb{R}^\kappa, \quad \kappa = \prod_{i=1}^n k_i \quad (8)$$

用一个向量表示 $x_i$ ,  $i \in [1, n]$ .

(ii) Proposition 2.2 表明, 当

$$x \in \Delta_\kappa, \quad x \in \Upsilon_\kappa, \quad x \in \mathcal{B}_\kappa$$

时, 表示式(8) 无信息损失.

## 三类有限集动态系统的代数状态空间表示

$$x(t+1) = Tx(t), \quad (9)$$

### (i) 混合值动态系统

$$x(t) \in \Delta_{\kappa} \Rightarrow T \in \mathcal{L}_{\kappa \times \kappa}. \quad (10)$$

### (ii) 马尔科夫链

$$x(t) \in \Upsilon_{\kappa} \Rightarrow T \in \Upsilon_{\kappa \times \kappa}. \quad (11)$$

### (iii) 有限自动机

$$x(t) \in \mathcal{B}_{\kappa} \Rightarrow T \in \mathcal{B}_{\kappa \times \kappa}. \quad (12)$$

## 相应的控制系统

$$x(t+1) = Lu(t)x(t), \quad (13)$$

(i) 混合值动态系统

$$u(t) \in \Delta_\mu, T \in \mathcal{L}_{\kappa \times \kappa \mu}. \quad (14)$$

(ii) 马尔科夫转移系统

$$u(t) \in \Upsilon_\mu \Rightarrow T \in \Upsilon_{\kappa \times \kappa \mu}. \quad (15)$$

(iii) 有限自动机

$$u(t) \in \mathcal{B}_\mu \Rightarrow T \in \mathcal{B}_{\kappa \times \kappa \mu}. \quad (16)$$

### Definition 2.4

设  $A \in \mathcal{M}_{p \times m}$   $B \in \mathcal{M}_{q \times m}$ , 则其Khatri-Rao 积为

$$A * B := [\text{Col}_1(A) \text{Col}_1(B), \dots, \text{Col}_m(A) \text{Col}_m(B)]. \quad (17)$$

### Proposition 2.5

(i) 混合值动态系统

设

$$x_i(t+1) = T_i x(t), \quad i \in [1, n], \quad (18)$$

则

$$x(t+1) = T x(t), \quad (19)$$

这里

$$T = T_1 * T_2 * \dots * T_n.$$

## Proposition 2.5(cont'd)

设(19) 给定, 则(18) 成立, 其中

$$T_i = \Pi_i T, \quad i \in [1, n].$$

(ii) 马尔科夫转移系统

$$(18) \Rightarrow (19), \quad (18) \not\Leftarrow (19).$$

(iii) 有限自动机

$$(18) \Leftarrow (19), \quad (18) \not\Rightarrow (19).$$

## Remark 2.6

(i) 对混合值动态系统,

$$x^2 = PR_k x, \quad x \in \Delta_k, \quad (20)$$

这里, 降幂矩阵为

$$PR_k = [\delta_k^1 \delta_k^1, \delta_k^2 \delta_k^2, \dots, \delta_k^k \delta_k^k].$$

(ii) 对马尔科夫转移系统

$$(18) \not\Leftarrow (19),$$

根本原因在于(20)对 $x \in \Upsilon^k$ 不成立.

(iii) 对有限自动机, 分量形式是伴生的.

(iv) Proposition 2.5 对控制网络也成立.

### III. 混合值动态系统

#### 布尔网络

一个 $n$  结点布尔网络是一个 $n$  顶点的有向图. 每个顶点只能取0 或1 这两个逻辑值, 顶点值的变化依赖于它与其邻域结点间的逻辑关系. 它的动态方程可以写成

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{cases} \quad (21)$$

这里,  $x_i \in \mathcal{D}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $f_i : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $i = 1, \dots, n$  为逻辑函数.

当逻辑变量  $x_i$  用向量形式表示时, (21) 可用代数状态空间方法表示为

$$x(t+1) = Lx(t), \quad (22)$$

这里,  $x(t) = \times_{i=1}^n x_i(t)$ ,  $L \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}$  为一逻辑矩阵。

### Example 3.1

图3 是一个布尔网络.

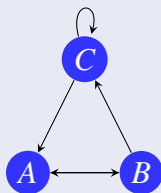


图 3: 布尔网络



### Example 3.1(cont'd)

其结点演化要用一个逻辑动态系统来刻画。例如

$$\begin{cases} A(t+1) = B(t) \wedge C(t) \\ B(t+1) = \neg A(t) \\ C(t+1) = B(t) \vee C(t). \end{cases} \quad (23)$$

下面,我们将它表示为形如(22)的代数形式。首先

$$\begin{cases} A(t+1) = M_c B(t) C(t) \\ B(t+1) = M_n A(t) \\ C(t+1) = M_d B(t) C(t). \end{cases} \quad (24)$$

经过一些简单的矩阵半张量积运算,可得到

### Example 3.1(cont'd)

$$x(t+1) = Lx(t), \quad (25)$$

这里  $x(t) = A(t)B(t)C(t)$ ,

$$L = \delta_8[3, 7, 7, 8, 1, 5, 5, 6].$$

$L$  包含了网络的全部信息, 通过它可了解网络的结构与性质。例如, 对极限环个数有如下结果:

### Theorem 3.2

考虑逻辑动态系统(21). 其代数状态空间表示为(22). 则其长度为 $s$  的极限环个数,  $N_s$ , 可由如下递推公式给出(不动点可看作长度为1 的极限环).

$$\begin{cases} N_1 = \text{Trace}(M) \\ N_s = \frac{\text{Trace}(M^s) - \sum_{k \in \mathcal{P}(s)} k N_k}{s}, \quad 2 \leq s \leq 2^n. \end{cases} \quad (26)$$

(这里 $\mathcal{P}(s)$  指 $s$  的真因子集(含1)).

## 👉 布尔控制网络

一个布尔控制网络可表示为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)), \\ y_j(t) = h_j(x(t)), \quad j = 1, \dots, p, \end{cases} \quad (27)$$

这里  $x_i \in \mathcal{D}$ ,  $x_i, i = 1, \dots, n$  为状态变量,  $u_i, i = 1, \dots, m$  为控制,  $y_i, i = 1, \dots, p$  为输出。

类似布尔网络,可以得到布尔控制网络的代数状态空间表示:

$$\begin{cases} x(t+1) = Lu(t)x(t), \\ y(t) = Hx(t), \end{cases} \quad (28)$$

这里  $x(t) = \times_{i=1}^n x_i(t)$ ,  $u(t) = \times_{i=1}^m u_i(t)$ ,  $y(t) = \times_{j=1}^p y_j(t)$ , 逻辑矩阵  $L \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^{n+m}}$ ,  $H \in \mathcal{L}_{2^p \times 2^n}$ .

### Example 3.3

图4 为一布尔控制网络.

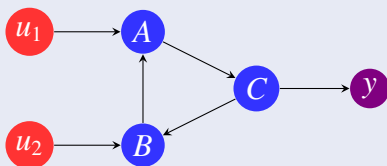


图 4: 布尔控制网络

其动态方程为

$$\begin{cases} A(t+1) = B(t) \wedge u_1(t) \\ B(t+1) = C(t) \vee u_2(t) \\ C(t+1) = A(t) \\ y(t) = \neg C(t) \end{cases} \quad (29)$$

### Example 3.3(cont'd)

其代数表达式为(28), 其中

$$L = \delta_8[1\ 1\ 5\ 5\ 2\ 2\ 6\ 6\ 1\ 3\ 5\ 7\ 2\ 4\ 6\ 8 \\ 5\ 5\ 5\ 5\ 6\ 6\ 6\ 6\ 5\ 7\ 5\ 7\ 6\ 8\ 6\ 8];$$

$$H = \delta_2[2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1].$$

布尔控制网络的全部性质由逻辑矩阵 $L$ 与 $H$ 决定。

## IV. 马尔科夫动态系统

### 👉 网络演化博弈

#### Definition 4.1

一个网络演化博弈可以用一个三元组 $((N, E), G, \Pi)$ 表示, 这里

- (i)  $(N, E)$  为网络图, 图中每个结点代表一个玩家;
- (ii) 一个基本网络博弈 $G$ ,  $((N, E))$  它是二人对称博弈, 使得如果 $(i, j) \in E$ , 那么 $i$  和 $j$  玩基本网络博弈 $G$ , 其策略分别为 $x_i(t)$  和 $x_j(t)$ ;
- (iii)  $\Pi$  为策略更新规则。



根据策略更新规则, 就可以写出局势演化方程:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \quad (30)$$

利用向量表示策略, 则  $x_i(t) \in \Delta_{k_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . 当使用混合策略时, 利用代数状态空间表示可得

$$x(t+1) = Tx(t), \quad (31)$$

这里  $x(t) = \times_{i=1}^n x_i(t)$ ,  $T \in \Upsilon_{\kappa \times \kappa}$  为一马尔科夫转移矩阵 ( $\kappa = \prod_{i=1}^n k_i$ ).

将矩阵半张量积方法用于演化博弈建模与分析的第一篇文章是[1]. [2] 给出了依赖于状态的马尔科夫型演化博弈的策略学习方法. [3] 给出博弈论半强张量积方法较全面的一个综述.

-  [1] P. Guo, Y. Wang, H. Li, Algebraic formulation and strategy optimization for a class of evolutionary networked games via semi-tensor product method, *Automatica*, Vol. 49, No. 11, 3384-3389, 2013.
-  [2] C. Li, Y. Xing, F. He, D. Cheng, A strategic learning algorithm for state-based games, *Automatica*, Vol. 113, 108615, 2020.
-  [3] D. Cheng, Y. Wu, G. Zhao, S. Fu, A comprehensive survey on STP approach to finite games, *J. Sys. Sci. Compl.*, Vol. 34, No. 5, 1666-1680, 2021.

## V. 有限自动机

### 迁移系统的代数状态空间表示

#### Definition 5.1

$T = (X, \Sigma, \delta, O, o)$  称为一个迁移系统，这里

- $X$ : 状态集
- $\Sigma$ : 输入集
- $\delta : X \times \Sigma \rightarrow 2^X$ : 迁移映射
- $O$ : 观测集
- $o : X \rightarrow O$ : 观测映射

如果  $|\delta(x, \sigma)| \leq 1$ , 则称  $T$  为确定的, 否则为不确定的.

## Example 5.2

考虑  $T = (X, \Sigma, \delta, O, o)$ , 这里,

- $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ,

- $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ ,

- 

$$\delta(x_1, \sigma_1) = \{x_2, x_3\} \quad \delta(x_2, \sigma_1) = \{x_2, x_3\}$$

$$\delta(x_2, \sigma_2) = \{x_4\}, \quad \delta(x_3, \sigma_2) = \{x_2, x_3\}$$

$$\delta(x_4, \sigma_1) = \{x_2, x_4\},$$

- $O = \{O_1, O_2, O_3\}$ ,

- 

$$o(x_1) = O_1, \quad o(x_2) = o(x_4) = O_2, \quad o(x_3) = O_3.$$

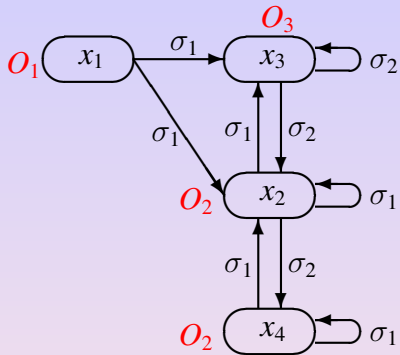


图 5: Transition System of Example 5.2

## Example 5.2(cont'd)

令

$$\begin{aligned}x_i &= \delta_4^i, & i &= 1, 2, 3, 4; \\ \sigma_j &= \delta_2^j, & j &= 1, 2; \\ o_k &= \delta_3^k, & k &= 1, 2, 3.\end{aligned}$$

记  $x = \times_{i=1}^4 x_i$ ,  $\sigma = \times_{j=1}^2 \sigma_j$ ,  $o = \times_{k=1}^3 o_k$ . 则有  $T$  的代数状态空间表示

$$\begin{cases} x(t+1) = L\sigma(t)x(t), \\ o(t) = Hx(t), \end{cases} \quad (32)$$

这里,

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \delta_3[1, 2, 3, 2].$$

## 👉 时序逻辑(Temporal Logic)

时序逻辑算子:

- $\bigcirc$ : next (下一个)
- $U$ : until (直到)
- $\square$ : always (总是)
- $\diamond$ : eventually (最终)

### Definition 5.3

(语法(syntax)) 线性时序逻辑(LTL)关于观测集 $O$ 的公式 $\phi$ 递推地定义如下:

$$\phi = \top \mid o \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \neg\phi \mid \bigcirc\phi \mid \phi_1 U \phi_2, \quad (33)$$

这里,  $\top$  为真,  $o \in O$ .

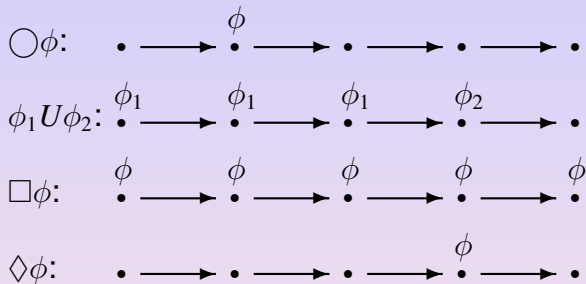


图 6: Temporal Logical Operator



### Definition 5.4

有限状态自动机  $A = (S, s_0, O, \delta, F)$ , 这里,

- $S$ : (有限)状态,
- $s_0$ : 初态,
- $O$ : 输入字符,
- $\delta : S \times O \rightarrow S$ : 迁移映射,
- $F \subset S$ : 可接受的(终点)集合.

(语义(semantics)):

$$W_O = W_O(1)W_O(2) \cdots W_O(n) \in O^*,$$
$$W_S = W_S(1)W_S(2) \cdots W_S(n+1) \in S^*,$$

这里  $W_S(1) = s_0$ ,  $W_S(k+1) = \delta(W_S(k), W_O(k))$ ,  $k \in [1, n]$

$$W_S(n+1) \in F.$$

## Example 5.5

考察一个有限自动机A. 其中 $O = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ ,  
 $F : W_O \models \phi, \phi = \diamond o_3 \wedge (o_1 U o_2)$ .

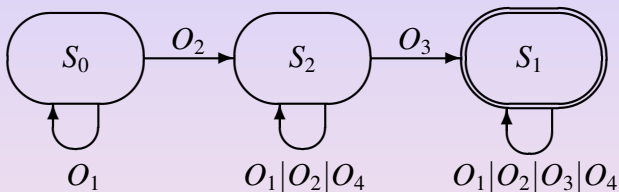


图 7:  $\phi = \diamond o_3 \wedge (o_1 U o_2)$

### Example 5.5(cont'd)

设:  $S_0 = \delta_3^1$ ,  $S_2 = \delta_3^2$ ,  $S_1 = \delta_3^3$ ,  $O_i = \delta_4^i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . 则  $\phi$  的代数状态空间表示为

$$s(t+1) = Lo(t)s(t), \quad (34)$$

这里,

$$L = \delta_3[1, 2, 3, 2, 2, 3, 0, 3, 3, 0, 2, 3].$$

## 👉 信息物理系统的控制



图 8: 信息物理系统的控制

- 📖 [1] C. Belta, B. Yordanov, E.A. Gol, *Formal Methods for Discrete-Time Dynamical Systems*, Springer, AG, 2017.

## VI. 小结

- 计算机时代，连续数学的统治地位可能会被离散或有限值数学代替；
- 三类典型有限值(有限值,随机分布的有限值,有限值子集)的矩阵半张量积表示；
- 三类典型有限值的动态演化系统. (三种代表性系统: 多种值逻辑网络, 演化博弈, 有限自动机).

结论: 矩阵半张量积可望成为计算机时代有效的数学工具.

谢谢！

Q&A