什么是矩阵半张积
3rd STP暑期班，第一讲

授课人：冯俊娥

矩阵半张量积理论与应用研究中心

2023/8/11-17

聊城大学

目录

1. 几种矩阵乘积的回顾
   - 矩阵标准乘积定义及性质
   - 矩阵Kronecker积定义及性质
   - 矩阵Hadamard积定义与性质
   - 矩阵Khatri-Rao积定义与性质
2. 矩阵半张量积
   - 矩阵半张量积定义
   - 矩阵半张量积的性质
3. 矩阵半张量积的准交换性
4. 进阶导读
   - 矩阵-矩阵半张量积
   - 矩阵-向量半张量积
   - 向量-向量的半张量积
   - 保维数的矩阵半张量积

1. 几种矩阵乘积的回顾
   - 矩阵标准乘积定义及性质
   - 矩阵Kronecker积定义及性质
   - 矩阵Hadamard积定义与性质
   - 矩阵Khatri-Rao积定义与性质
2. 矩阵半张量积
   - 矩阵半张量积定义
   - 矩阵半张量积的性质
3. 矩阵半张量积的准交换性
4. 进阶导读
   - 矩阵-矩阵半张量积
   - 矩阵-向量半张量积
   - 向量-向量的半张量积
   - 保维数的矩阵半张量积

定义1.1.1

设$A=(a_{ij})\in M_{m\times n}, B=(b_{ij})\in M_{n\times q}$,定义

$$AB=(c_{ij})\in M_{m\times q} \tag{1}$$

这里$c_{ij}=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$，$i=1,2,\cdots m; j=1,2,\cdots q.$

性质1.1.1

设A, B, C为适维矩阵，$a, b \in \mathbb{R}$，则有

1. 结合律

$$(AB)C = A(BC).$$

2. 分配律

$$A(aB + bC) = aAB + bAC,$$
$$(aA + bB)C = aAC + bBC.$$

3.
$$(AB)^T = B^T A^T.$$

4. 设$A, B \in M_{n\times n}$均可逆，则

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

5. 设$A, B \in M_{n\times n}$,则

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

6. 设$A, B \in M_{n\times n}$,则

$$tr(AB) = tr(BA).$$

7.
$$rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}.$$

1. 几种矩阵乘积的回顾
   - 矩阵标准乘积定义及性质
   - 矩阵Kronecker积定义及性质
   - 矩阵Hadamard积定义与性质
   - 矩阵Khatri-Rao积定义与性质
2. 矩阵半张量积
   - 矩阵半张量积定义
   - 矩阵半张量积的性质
3. 矩阵半张量积的准交换性
4. 进阶导读
   - 矩阵-矩阵半张量积
   - 矩阵-向量半张量积
   - 向量-向量的半张量积
   - 保维数的矩阵半张量积

定义1.2.1

设$A=(a_{ij})\in M_{m\times n}, B=(b_{ij})\in M_{p\times q}$，则$A$与$B$的Kronecker积定义为：

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}\in M_{mp\times nq}. \tag{2}$$

例1.2.1

设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} 0B & B \\ -B & 0B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

性质1.2.1

设A, B, C为适维矩阵，$a, b \in \mathbb{R}$，则有

1. 结合律
$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$
2. 分配律
$$A \otimes (aB + bC) = a(A \otimes B) + b(A \otimes C),$$
$$(aA + bB) \otimes C = a(A \otimes C) + b(B \otimes C).$$
3.
$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T.$$
4. 设A, B均可逆，则
$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$
5. 设$A \in M_{m\times m}, B \in M_{n\times n}$，则
$$\det(A \otimes B) = \det(A)^n \det(B)^m.$$
6. 设$A \in M_{m\times m}, B \in M_{n\times n}$，则
$$tr(A \otimes B) = tr(A)tr(B).$$
7.
$$rank(A \otimes B) = rank(A)rank(B).$$

性质1.2.2

设$A \in M_{m\times n}, B \in M_{p\times q}, C \in M_{n\times r}, D \in M_{q\times s}$，则

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD).$$

特别地，

$$A \otimes B = (A \otimes I_p)(I_n \otimes B).$$

性质1.2.3

1. 设$X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^n$为两列向量，则
$$V_c(XY^T) = Y \otimes X.$$
2. 设$A \in M_{m\times p}, B \in M_{p\times q}, C \in M_{q\times n}$，则
$$V_c(ABC) = (C^T \otimes A)V_c(B).$$

V_c是将矩阵按列展成一个列向量.

1 几种矩阵乘积的回顾
- 矩阵标准乘积定义及性质
- 矩阵Kronecker积定义及性质
- 矩阵Hadamard积定义与性质
- 矩阵Khatri-Rao积定义与性质

2 矩阵半张量积
- 矩阵半张量积定义
- 矩阵半张量积的性质

3 矩阵半张量积的准交换性

4 进阶导读
- 矩阵-矩阵半张量积
- 矩阵-向量半张量积
- 向量-向量的半张量积
- 保维数的矩阵半张量积

定义1.3.1

设$A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in M_{m\times n}$，则$A$与$B$的Hadamard积定义为：

$$A\odot B=(a_{ij}b_{ij})\in M_{m\times n}. \tag{3}$$

例1.3.1

设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 7 & 8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 0\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$A\odot B=\begin{pmatrix}-1 & 10 & 0\\ 24 & -21 & 8\end{pmatrix}.$$

性质1.3.1

设A, B, C为适维矩阵，$a, b \in \mathbb{R}$，则有

1. 交换律
$$A \odot B = B \odot A.$$
2. 结合律
$$(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C).$$
3. 分配律
$$(aA + bB) \odot C = a(A \odot C) + b(B \odot C).$$
4. $$(A \odot B)^T = A^T \odot B^T.$$
5. 设$A, B \in M_n$是对称阵，若$A \geq 0, B \geq 0$，则
$$\det(A \odot B) \geq \det(A)\det(B).$$

性质1.3.2

设$A, B \in M_n$是对称阵，

- 若$A \geq 0, B \geq 0$，则$A \odot B \geq 0$;
- 若$A > 0, B > 0$，则$A \odot B > 0$.

1. 几种矩阵乘积的回顾
   - 矩阵标准乘积定义及性质
   - 矩阵Kronecker积定义及性质
   - 矩阵Hadamard积定义与性质
   - 矩阵Khatri-Rao积定义与性质
2. 矩阵半张量积
   - 矩阵半张量积定义
   - 矩阵半张量积的性质
3. 矩阵半张量积的准交换性
4. 进阶导读
   - 矩阵-矩阵半张量积
   - 矩阵-向量半张量积
   - 向量-向量的半张量积
   - 保维数的矩阵半张量积

定义1.4.1

设$n, m, p, q, n_i, m_j, p_i, q_j, (i = 1 \cdots r, j = 1 \cdots s)$均为正整数，且满足

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = m, \sum_{j=1}^{s} n_j = n, \sum_{i=1}^{r} p_i = p, \sum_{j=1}^{s} q_j = q,$$

$A = (A_{ij}) \in M_{m\times n}, B = (B_{ij}) \in M_{p\times q}$为分块矩阵，其中$A_{ij} \in M_{m_i \times n_j}$, $B_{ij} \in M_{p_i \times q_j}$,即

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}.$$

定义矩阵A和B的Khatri-Rao积为：

$$A * B = (A_{ij} \otimes B_{ij}) \in M_{u\times v}, \tag{4}$$

其中$u = \sum_{i=1}^{r} m_i p_i, v = \sum_{j=1}^{s} n_j q_j$.

例1.4.1

设

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c:cc:cc} 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right],$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c:c} 3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

则

$$A * B = \begin{pmatrix} A_1 \otimes B_1 & A_2 \otimes B_2 & A_3 \otimes B_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc:cc:cc} 3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 6 & 8 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

注1.4.1

1. 若$r=s=1$, 则$A*B=A\otimes B$;
2. 若$m=p,n=q,m_1=m_2=\cdots=m_r=n_1=n_2=\cdots=n_s=1$, 则$A*B=A\odot B$;
3. 若$A\in M_{m\times r}$, $B\in M_{n\times r}$, $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_r\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_r\end{pmatrix}$, 则
$$A*B=\begin{pmatrix}A_1\otimes B_1 & A_2\otimes B_2 & \cdots & A_r\otimes B_r\end{pmatrix};$$
4. 同样两个矩阵, 划分不同, 乘积结果也不同.

性质1.4.1

1. 结合律：设$A \in M_{m\times r}$，$B \in M_{n\times r}$，$C \in M_{p\times r}$，则
$$(A * B) * C = A * (B * C).$$

2. 分配律：设$A, B \in M_{m\times r}$，$C \in M_{n\times r}$，$a, b \in \mathbb{R}$，则
$$A * (aB + bC) = a(A * B) + b(A * C),$$
$$(aA + bB) * C = a(A * C) + b(B * C).$$

1. 几种矩阵乘积的回顾
   - 矩阵标准乘积定义及性质
   - 矩阵Kronecker积定义及性质
   - 矩阵Hadamard积定义与性质
   - 矩阵Khatri-Rao积定义与性质
2. 矩阵半张量积
   - 矩阵半张量积定义
   - 矩阵半张量积的性质
3. 矩阵半张量积的准交换性
4. 进阶导读
   - 矩阵-矩阵半张量积
   - 矩阵-向量半张量积
   - 向量-向量的半张量积
   - 保维数的矩阵半张量积

2.1.1

设$X \in \mathbb{R}_{1\times np}$，$Y \in \mathbb{R}_{p\times 1}$，将$x$等分成$p$块，$X = \begin{pmatrix} X^1 & X^2 & \cdots & X^p \end{pmatrix}$，定义矩阵$A$和$B$ 的半张量积为

$$X \ltimes Y = \sum_{i=1}^{p} X^i y_i \in \mathbb{R}_{1\times n}. \tag{5}$$

定义2.1.2

设$A \in M_{m\times n}$，$B \in M_{p\times q}$，t为n和p的最小公倍数，定义矩阵A和B 的半张量积为

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{t/n})(B \otimes I_{t/p}) \in M_{(mt/n)\times(qt/p)}. \tag{6}$$

注2.1.1

- 当$n = p$，则有$A \ltimes B = AB$;
- 当$n = rp$，记$A \succ_r B$，则有$A \ltimes B = A(B \otimes I_r)$;
- 当$rn = p$，记$A \prec_r B$，则有$A \ltimes B = (A \otimes I_r)B$.

Cheng D Z. Semi-tensor product of matrices and its application to Morgan’ s problem. Science In China (Series F), Vol. 44(3): 195-212, 2001.

Cheng D Z, Qi H, Li Z. Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach. London: Springer, 2011.

例2.1.1

1. 设$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, 则

$$X\ltimes Y=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\cdot 1+\begin{pmatrix}3 & -1\end{pmatrix}\cdot 2=\begin{pmatrix}7 & 0\end{pmatrix}.$$

2. 设$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T$, 则

$$X\ltimes Y=1\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}.$$

3. 设$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\2 & 3 & 1 & 2\\3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & -1\end{pmatrix}$, 则

$$A\ltimes B=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -3 & -5\\4 & 7 & -5 & -8\\5 & 2 & -7 & -4\end{pmatrix}$$

例2.1.1续

4. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\end{pmatrix}$, 则

$$
\begin{aligned}
A\ltimes B &= (A\otimes I_2)(B\otimes I_3)\\
&= \begin{pmatrix}1&0&2&0&1&0\\0&1&0&2&0&1\\2&0&3&0&1&0\\0&2&0&3&0&1\\3&0&2&0&1&0\\0&3&0&2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&0&0\\0&1&0&0&-2&0\\0&0&1&0&0&-2\\2&0&0&-1&0&0\\0&2&0&0&-1&0\\0&0&2&0&0&-1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&0&2&0&1&0\\0&1&0&2&0&1\\2&0&3&0&1&0\\0&2&0&3&0&1\\3&0&2&0&1&0\\0&3&0&2&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

1. 几种矩阵乘积的回顾
   - 矩阵标准乘积定义及性质
   - 矩阵Kronecker积定义及性质
   - 矩阵Hadamard积定义与性质
   - 矩阵Khatri-Rao积定义与性质
2. 矩阵半张量积
   - 矩阵半张量积定义
   - 矩阵半张量积的性质
3. 矩阵半张量积的准交换性
4. 进阶导读
   - 矩阵-矩阵半张量积
   - 矩阵-向量半张量积
   - 向量-向量的半张量积
   - 保维数的矩阵半张量积

性质2.2.1

设A, B, C为适维矩阵，$a, b \in \mathbb{R}$，则有

1. 结合律
$$(A \ltimes B) \ltimes C = A \ltimes (B \ltimes C).$$
2. 分配律
$$A \ltimes (aB + bC) = a(A \ltimes B) + b(A \ltimes C),$$
$$(aA + bB) \ltimes C = a(A \ltimes C) + b(B \ltimes C).$$
3. $$(A \ltimes B)^T = B^T \ltimes A^T.$$
4. 设A，B均可逆，则
$$(A \ltimes B)^{-1} = B^{-1} \ltimes A^{-1}.$$

性质2.2.2

设 A 与 B 均为方阵，则

1. $A \ltimes B$ 与 $B \ltimes A$ 有相同的特征函数;
2. $$tr(A \ltimes B) = tr(B \ltimes A)$$
3. 如果 A 或 B 可逆，则 $A \ltimes B \sim B \ltimes A$, “$\sim$” 表示矩阵相似;
4. 如果 A 与 B 均为上三角 (下三角、对角阵或正交阵)，那么，$A \ltimes B$ 也是上三角 (下三角、对角阵或正交阵);
5. 设$A \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, t为m和n的最小公倍数，那么
$$det(A \ltimes B) = [det(A)]^{t/m}[det(B)]^{t/n}.$$

性质2.2.3 向量的半张量积与张量积可以互相转化

设 $X \in R^m$, $Y \in R^n$ 为两个列(行)向量，则

$$X \ltimes Y = X \otimes Y.$$

引入一个记号: 设 $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{p\times q}$, 定义 A 与 B 的比例为

$$A : B \triangleq n : p.$$

定义2.2.1

设 $A : B = n : p$, 分块

$$A = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} & \cdots & A^{1l} \\ A^{21} & A^{22} & \cdots & A^{2l} \\ \vdots & & & \\ A^{s1} & A^{s2} & \cdots & A^{sl} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B^{11} & B^{12} & \cdots & B^{1t} \\ B^{21} & B^{22} & \cdots & A^{2t} \\ \vdots & & & \\ B^{l1} & B^{l2} & \cdots & B^{lt} \end{bmatrix} \tag{7}$$

称为一个恰当分割 (proper division), 如果

$$A^{i\alpha} : B^{\alpha j} = n : p, \quad i = 1, 2, \cdots, s;\ j = 1, 2, \cdots, t.$$

定理2.2.1

设 $A:B=n:p$, 分块 (7) 为一个恰当分割, 则$A \ltimes B=\left(C^{ij}\right)$, 其中$C^{ij}=\sum_{k=1}^{l} A^{ik} \ltimes B^{kj}$.

推论2.2.1

设在 (7) 中 A 为列均分, 即 A^{ij}, $j=1,\cdots,l$ 的列数相等, B 为行均分, 即 B^{ij}, $i=1,\cdots,l$ 的行数相等, 则该分割为一恰当分割. 因此, 分块乘法成立.

推论2.2.2

设 $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{p\times q}$, 则

$$A \ltimes B := \left(C^{ij} \mid i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,q\right), \tag{8}$$

这里

$$C^{ij}=Row_i(A) \ltimes Col_j(B).$$

例2.2.1（标准积结合律的反例）

设$X, Y, Z, W \in \mathbb{R}^n$都是列向量，计算$XY^TZW^T$. 显然有下式成立

$$(XY^T)(ZW^T) = X(Y^TZ)W^T = (Y^TZ)(XW^T) \in M_{n\times n}. \tag{9}$$

若继续用结合律则有

$$(Y^TZ)(XW^T) = Y^T(ZX)W^T. \tag{10}$$

此处ZX在矩阵乘法中是不相容的，但是用半张量积则不会出现矛盾，我们有下式成立

$$(Y^TZ)(XW^T) = Y^T \ltimes (Z \ltimes X) \ltimes W^T. \tag{11}$$

命题3.1.1 （伪交换律）

设$A \in M_{m\times n}$，

- 若$Z \in \mathbb{R}^t$为一行向量，则$A \ltimes Z = Z \ltimes (I_t \otimes A)$;
- 若$Z \in \mathbb{R}^t$为一列向量，则$Z \ltimes A = (I_t \otimes A) \ltimes Z$.

定义3.1.1 （换位矩阵）

定义 (m,n)-维换位矩阵如下:

$$
\begin{aligned}
W_{[m,n]} &:= \left[I_n \otimes \delta_m^1, I_n \otimes \delta_m^2, \cdots, I_n \otimes \delta_m^m\right] \\
&= \left[\delta_n^1 \ltimes \delta_m^1 \cdots \delta_n^n \ltimes \delta_m^1 \cdots \delta_n^1 \ltimes \delta_m^m \cdots \delta_n^n \ltimes \delta_m^m\right] \\
&= \begin{bmatrix} I_m \otimes (\delta_n^1)^T \\ \vdots \\ I_m \otimes (\delta_n^n)^T \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

其中δ_m^i 为m维单位矩阵的第i列.

例3.1.1

$$
W_{[2,3]} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} (11) & (12) & (13) & (21) & (22) & (23) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} (11) \\ (21) \\ (12) \\ (22) \\ (13) \\ (23) \end{array}
$$

命题3.1.1 （换位矩阵的性质）

$$W_{[m,n]}^T := W_{[n,m]}, \quad W_{[m,n]}^{-1} := W_{[m,n]}^T.$$

命题1.1.13

- 设 $X \in R^m$, $Y \in R^n$ 为两个列向量, 则

$$W_{[m,n]} X \ltimes Y = Y \ltimes X.$$

- 设 $X \in R^m$, $Y \in R^n$ 为两个行向量, 则

$$X \ltimes Y W_{[m,n]} = Y \ltimes X.$$

矩阵半张量积的优点

1. 打破了维数的限制
2. 普通矩阵乘法的推广
3. 几乎保持所有传统矩阵乘法的性质
4. 可以表示任意阶次线性映射
5. 有一定的可交换性

矩阵半张量积–新工具

1. 中国科学院程代展研究员打破了普通矩阵乘法对于维数的限制, 提出的一种新的矩阵乘积——矩阵半张量积(Semi-Tensor Product of Matrices), 将传统矩阵乘积推广到更一般情况. 利用矩阵半张量积方法, 可以将繁杂的逻辑动态演化过程转化为简洁的离散迭代形式.
2. 中国科学院郭雷院士给予了高度评价, 称“矩阵的半张量积可能会成为计算机时代呼唤的新的数学工具之一, 以实现基于计算发现新现象, 解决新问题的目的”.

Cheng D Z, Qi H S. A linear representation of dynamics of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(10):2251–2258.

郭雷. 评“矩阵的半张量积: 一个便捷的新工具”[J]. 科学通报, 2011, 56(32): 2662-2663.

半张量积的应用

1. 系统生物学（逻辑网络）
2. 有限博弈论
3. 密码学（非线性移位寄存器）
4. 多智能体同步与队列控制
5. 有限自动机
6. 故障诊断与数字电路设计
7. 网络查询与遥操作,
8. 内燃发动机
9. 智能家居
10. 变维系统
11. 模糊逻辑系统
12. 量子控制系统
13. 图像识别

系统生物学

- Li F F. On the logical control of Markovian jump Boolean networks: A generalization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022, 53(3): 1872-1881.
- Li F F, Tang Y. Multi-sensor fusion Boolean Bayesian filtering for stochastic Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022, DOI: 10.1109/TNNLS.2021.3138132.
- Li F F, Tang Y. Pinning controllability for a Boolean network with arbitrary disturbance inputs[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(6): 3338-3347.
- Li R, Yang M, Chu T G. State feedback stabilization for Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(7): 1853–1857.
- Li H T, Wang Y Z. Output feedback stabilization control design for Boolean control networks[J]. Automatica, 2013, 49(12): 3641–3645.
- Lu J, Li H, Liu Y, Li F. Survey on semi-tensor product method with its applications in logical networks and other finite-valued systems[J]. IET Control Theory and Application, 2017, 11(13): 2040-2047.
- Zhang K Z, Zhang L J. Controllability of probabilistic Boolean control networks with time-variant delays in states[J]. Sci China Inf Sci, 2016, 59: 92204.
- Fornasini E, Valcher M.E. Recent developments in Boolean networks control, J. Control Dec. 2016, 3(1): 1 – 18.

博弈论

- Guo P L, Wang Y Z, Li H T. Algebraic formulation and strategy optimization for a class of evolutionary networked games via semi-tensor product method[J]. Automatica, 2013, 49(11):3384–3389.
- Cheng D Z. On finite potential games[J]. Automatica, 2014, 50(7):1793–1801.
- Cheng D Z, He F H, Qi H S, Xu T T. Modeling, analysis and control of networked evolutionary games[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(9):2402–2415.
- Li C X, He F H, Liu T,Cheng D Z. Symmetry-based decomposition of finite games[J]. Sci China Inf Sci, 2019, 62: 012207.
- Cheng D Z, Qi H S, Liu Z Q. From STP to game-based control[J]. Sci China Inf Sci, 2018, 61: 010201.
- Hao Y Q, Cheng D Z. Finite element approach to continuous potential games[J]. Sci China Inf Sci, 2021, 64: 149202.

密码学

- Zhong, J H, Lin, D D. Decomposition of nonlinear feedback shift registers based on Boolean networks[J]. Sci China Inf Sci, 2019, 62(3): 039110.
- Zhao D W, Peng H P, Li L X, Hui S L, Yang Y X. Novel way to research nonlinear feedback shift register[J]. Sci China Inf Sci, 2014, 57(9): 1–14.
- Lu J Q, Li M L, Huang T W, Liu Y, Cao J D. The transformation between the Galois NLFSRs and the Fibonacci NLFSRs via semi-tensor product of matrices[J]. Automatica, 2018, 96: 393–397.
- Liu Z B, Wang Y Z, Cheng D Z. Nonsingularity of feedback shift registers[J]. Automatica, 2015, 55: 247-253.
- Zhong J H, Lin D D. Decomposition of nonlinear feedback shift registers based on Boolean networks[J]. Sci China Inf Sci, 2019, 62: 39110.
- Zhong J H, Lin D D. Stability of nonlinear feedback shift registers[J]. Sci China Inf Sci, 2016, 59: 1-12.

多智能体同步与队列控制

- Wang Y Z, Zhang C H, Liu Z B. A matrix approach to graph maximum stable set and coloring problems with application to multi-agent systems[J]. Automatica, 2012 48(7):1227–1236.
- Li R, Chu T. Complete synchronization of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems, 2012, 23(5):840-846.
- Zhang L Q, Feng J E, Mix-valued logic-based formation control[J]. International Journal of Control, 2013, 86(6):1191-1199.

有限自动机

- Xu X R, Hong Y G. Matrix expression and reachability analysis of finite automata[J]. Journal of Control Theory & Applications, 2012, 10(2):210–215.
- Xu X R, Hong Y G. Observability analysis and observer design for finite automata via matrix approach[J]. IET Control Theory & Applications, 2013, 7(12):1609–1615.
- Yan Y Y, Chen Z Q, Liu Z X. Semi-tensor product approach to controllability and stabilizability of finite automata[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2015, 26(1):134–141.
- Zhang K Z, Zhang L J. Observability of Boolean control networks: a unified approach based on finite automata[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(9):2733–2738.
- Wang B, Feng J E, Meng M. Matrix approach to model matching of composite asynchronous sequential machines[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(13): 2122-2130.

故障诊断与数字电路设计

- Li H T, Wang Y Z. Boolean derivative calculation with application to fault detection of combinational circuits via the semi-tensor product method[J]. Automatica, 2012, 48(4):688–693.
- 欧阳城添, 江建慧. 基于概率转移矩阵的时序电路可靠度估计方法[J]. 电子学报, 2013, 41(1):171–177.

网络查询与遥操作

- 陈宜滨, 席宁, 缪磊, 李洪谊, 王越超. 半张量积理论在网络遥操作系统中的应用[J]. 机器人, 2012, 34(1):50–55.
- Liu X H, Yong X U. An inquiry method of transit network based on semi-tensor product[J]. Complex Systems & Complexity Science, 2013, 10(1):38–44.

网智能家居、工程问题

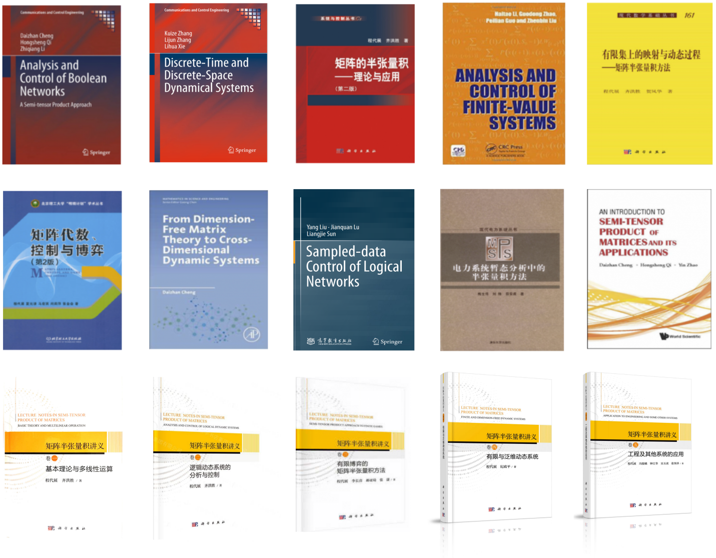
- Kabir M H, Hoque M R, Koo B J, Yang S H. Mathematical modelling of a context-aware system based on Boolean control networks for smart home[C]. Consumer Electronics (ISCE 2014), The 18th IEEE International Symposium on. IEEE, 2014: 1-2.
- 梅生伟，刘锋，薛安成. 电力系统暂态分析中的半张量积方法[M]. 清华大学出版社, 2010.
- Wu Y H, Shen T L. A logical dynamical systems approach to modeling and control of residual gas fraction in IC engines[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2013, 46(21): 495-500.
- Wu Y H, Shen T L. Policy iteration approach to control residual gas fraction in ic engines under the framework of stochastic logical dynamics[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2016, 99:1–8.
- Li H T, Zhao G D, Meng M, Feng J E. A survey on applications of semi-tensor product method in engineering, Sci China Inf Sci[J]. 2018, 61:010202.
- Zhang Z, Leifeld T, Zhang P. Reconstructibility analysis and observer design for Boolean control networks. IEEE Trans. Control Netw. Syst.[J], 2020, 7(1): 516-528.

量子控制、模糊系统

- Qi H S, Mu B Q, Petersen I R, Shi G D, Measurement-induced Boolean dynamics and controllability for closed quantum networks. Automatica, 2020, 114:108816.
- Qi H, Mu B. Mu, Petersen I.R., et al. Measurement-Induced Boolean Dynamicsfor Open Quantum Networks. IEEE Trans. Control Netw. Syst., In press, 2023.
- Lyu H, Wang W, Liu X. Universal approximation of multi-variable fuzzy systems by semi-tensor product. IEEE Trans. Fuzzy Syst., 2020, 28(11): 2972-2981.
- Lyu H, Wang W, Liu X. Modeling of multi-variable fuzzy systems by semitensor product. IEEE Trans. Fuzzy Syst., 2020, 28(2): 228-235.
- Lyu H, Wang W, Liu X. Parameter identification and optimization of continuous MIMO fuzzy control systems by semi-tensor product. Fuzzy Sets Syst., 2021, DOI: 10.1016/j.fss.2021.06.004.
- Fan H, Feng J, Meng M, Wang B. General decomposition of fuzzy relations: semi-tensor product approach. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 384: 75-90.
- Ge A, Chang Z, Feng J. Interval Type-2 Fuzzy Relation Matrix Model via Semi-Tensor Product. IEEE Trans. Fuzzy Syst., has been accepted.

变维系统

- Cheng D Z, Xu Z, Shen T, Equivalence-based model of dimension -varying linear systems, IEEE Trans. Aut. Contr., vol. 65, no. 12, pp. 5444-5449, 2020.
- Liu Y N, Li H T. Relations of controllability and observability between continuous-time linear system and its projective system, 2021 40th Chinese Control Conference (CCC), Shanghai, China, 2021, 526-531.
- Zhang Q L, Wang B, Feng J E. Solution and stability of continuous-time cross-dimensional linear systems. Frontiers of Information Technology and Electronic Engineering, 2021, 22(2): 210-221.
- Feng J E, Wang B, Yu Y Y. On dimensions of linear discrete dimension-unbounded systems. International Journal of Control Automation and Systems, 2021,19(1): 471-477.
- Li Y L, Li H T, Feng J E, Li J J. Reachability of dimension-bounded linear systems. Mathematical Biosciences and Engineering, 2022, 20(1): 489-504.
- Zhang K Z, Johansson K H. Long-term behavior of cross-dimensional linear dynamical systems. Proceedings of 2018 37th Chinese Control Conference(CCC). Wuhan, China: IEEE, 2018: 158-163.


Analysis and Control of Boolean Networks
A Semi-tensor Product Approach
Daizhan Cheng
Hongsheng Qi
Zhiqiang Li
Springer
Discrete-Time and Discrete-Space Dynamical Systems
Kuize Zhang
Lijun Zhang
Lihua Xie
Springer
矩阵的半张量积
——理论与应用
（第二版）
ANALYSIS AND CONTROL OF FINITE-VALUE SYSTEMS
CRC Press
有限集上的映射与动态过程
——矩阵半张量积方法
矩阵代数、控制与博弈
（第2版）
From Dimension-Free Matrix Theory to Cross-Dimensional Dynamic Systems
Daizhan Cheng
Sampled-data Control of Logical Networks
Yang Liu · Jianquan Lu
Liangjie Sun
Springer
电力系统暂态分析中的半张量积方法
AN INTRODUCTION TO SEMI-TENSOR PRODUCT OF MATRICES AND ITS APPLICATIONS
Daizhan Cheng · Hongsheng Qi · Yin Zhao
World Scientific
矩阵半张量积讲义
卷一
基本理论与多线性运算
矩阵半张量积讲义
卷二
逻辑动态系统的分析与控制
矩阵半张量积讲义
卷三
有限博弈的矩阵半张量积方法
矩阵半张量积讲义
卷四
有限与泛维动态系统
矩阵半张量积讲义
卷五
工程及其他系统的应用

国内外研究团队

国内50多个研究团队		
中国科学院数学与系统研究院	同济大学	天津工业大学
中国科学院信息工程研究所	山东师范大学	汕头大学
香港大学	浙江师范大学	北京邮电大学
香港城市大学	哈尔滨工业大学	西南财经大学
北京大学	华东理工大学	重庆师范大学
清华大学	南京师范大学	山东财经大学
中南大学	扬州大学	北京电力大学
南开大学	山东科技大学	西北工业大学
山东大学	河南财经政法大学	河南理工大学
浙江大学	西北工业大学	河南科技大学
大连理工大学	青岛农业大学	潍坊学院
西南民族大学	聊城大学	河北工业大学
内蒙古财经大学	天津科技大学	榆林学院
哈尔滨工程大学	大连海事大学	华南理工大学.....

国内外研究团队

国外有40多个研究团队，分布在20多个国家	
新加坡南洋理工大学	德国柏林工业大学
日本东京都立大学	德克萨斯农工大学卡塔尔分校
日本京都大学	德国波茨坦气候影响研究所
俄罗斯萨利托夫州立大学	英国伦敦布鲁内尔大学
俄罗斯切尔尼舍夫斯基萨拉托夫州立大学	意大利卡梅里大学
美国德克萨斯农工大学卡塔尔分校	意大利米兰理工大学
美国德克萨斯农工大学	意大利帕多瓦大学
美国宾夕法尼亚州卡耐基梅隆大学	沙特阿拉伯阿卜杜勒阿齐兹国王大学
美国密歇根大学	澳大利亚西悉尼大学
韩国岭南大学	南非比勒陀利亚大学
泰国通布里国王蒙古特科技大学	南非约翰内斯堡大学
巴西圣卡塔琳娜联邦大学	加拿大胡首大学......

1 几种矩阵乘积的回顾
- 矩阵标准乘积定义及性质
- 矩阵Kronecker积定义及性质
- 矩阵Hadamard积定义与性质
- 矩阵Khatri-Rao积定义与性质

2 矩阵半张量积
- 矩阵半张量积定义
- 矩阵半张量积的性质

3 矩阵半张量积的准交换性

4 进阶导读
- 矩阵-矩阵半张量积
- 矩阵-向量半张量积
- 向量-向量的半张量积
- 保维数的矩阵半张量积

定义4.1.1 （右半张量积）

在矩阵的左半张量积的定义式中，如果将单位阵换到左边，可得

$$A \rtimes B = \left(I_{t/n} \otimes A\right)\left(I_{t/p} \otimes B\right).$$

它称为矩阵的右半张量积.

(i) 它也是矩阵普通积的推广.

(ii) 它也满足矩阵乘积的一般要求，即满足结合律与分配律.

因此，每一种矩阵左半张量积都可以构造相应的右半张量积.

定义4.1.2 （矩阵乘子）

在矩阵的左半张量积的定义式中，我们用单位阵$\{I_k \mid k = 1, 2, \cdots\}$ 放大矩阵维数．这里$\{I_k \mid k = 1, 2, \cdots\}$ 称为矩阵乘子．任何一族方阵

$$\{\Gamma_k \in \mathcal{M}_{k\times k} \mid k = 1, 2, \cdots\}$$

都可以称为有效的矩阵乘子，如果用它定义出来的矩阵半张量积满足:

(i) 它是矩阵普通积的推广．

(ii) 它满足结合律与分配律．

定义4.1.3: 依赖于矩阵乘子的矩阵半张量积

设$\Gamma = \{\Gamma_n | n \geq 1\}$为一矩阵乘子，$A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{p\times q}$．那么，$A$与$B$基于乘子$\Gamma$的矩阵-矩阵左半张量积定义如下:

$$A \ltimes_{\Gamma} B := (A \otimes \Gamma_{t/n})(B \otimes \Gamma_{t/p}), \tag{12}$$

这里t为n 与p的最小公倍数．

程代展，齐洪胜．矩阵半张量积讲义，卷一: 基本理论与多线性运算．科学出版社，北京，2020．

三种矩阵乘子

1.
$$J_n := \frac{1}{n}\mathbf{1}_{n\times n}, n = 1, 2, \cdots .$$

2.
$$(\Delta_n^U)_{i,j} = \begin{cases} 1, \ i = 1, \ \text{且} j = 1, \\ 0, \ \text{其他}. \end{cases}$$

3.
$$(\Delta_n^D)_{i,j} = \begin{cases} 1, \ i = 1, \ \text{且} j = n, \\ 0, \ \text{其他}. \end{cases}$$

程代展, 齐洪胜. 矩阵半张量积讲义, 卷一: 基本理论与多线性运算. 科学出版社, 北京, 2020.

1 几种矩阵乘积的回顾
- 矩阵标准乘积定义及性质
- 矩阵Kronecker积定义及性质
- 矩阵Hadamard积定义与性质
- 矩阵Khatri-Rao积定义与性质

2 矩阵半张量积
- 矩阵半张量积定义
- 矩阵半张量积的性质

3 矩阵半张量积的准交换性

4 进阶导读
- 矩阵-矩阵半张量积
- 矩阵-向量半张量积
- 向量-向量的半张量积
- 保维数的矩阵半张量积

定义4.2.1 （矩阵-向量半张量积）

令$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $X \in \mathcal{V}_k$, t为n 与k的最小公倍数. 那么, A在X上的作用被定义如下:

$$A \vec{\ltimes} X := (A \otimes I_{t/n})(X \otimes \mathbf{1}_{t/k}).$$

类似于矩阵-矩阵半张量积中的矩阵乘子, 我们同样可以定义矩阵-向量半张量积中的向量乘子.

两种向量乘子

1. $$\gamma = \delta^U := \{\delta_n^1 | n = 1, 2, \cdots\}.$$
2. $$\gamma = \delta^D := \{\delta_n^n | n = 1, 2, \cdots\}.$$

定义4.2.2（矩阵-向量半张量积的一般定义）

设Γ为一矩阵乘子，γ为一向量乘子，$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$，$x \in \mathbb{R}^r$，$t$ 是n 与r 的最小公倍数．那么，A与x的关于Γ与γ的矩阵-向量半张量积(简称为"MV-STP")，记作$\vec{\times}$，定义如下：

- 左MV-STP:

$$A \vec{\times}_l x := (A \otimes \Gamma_{t/p})(x \otimes \gamma_{t/r}). \tag{13}$$

矩阵-向量半张量积在变维系统中的应用

1. 一个离散时间的线性系统被定义如下:

$$
\begin{aligned}
& x(t+1) = A(t)\vec{\ltimes} x(t), \ \ x(0) = x_0, \\
& A(t) \in \mathcal{M}, x(t) \in \mathcal{V}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

2. 一个连续时间的线性系统被定义如下:

$$
\begin{aligned}
& \dot{x}(t) = A(t)\vec{\ltimes} x(t), \ \ x(0) = x_0, \\
& A(t) \in \mathcal{M}, x(t) \in \mathcal{V},
\end{aligned} \tag{15}
$$

其中$\mathcal{M} = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{m\times n}$ 和$\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$.

Cheng D Z. From dimension-free matrix theory to cross-dimensional dynamic systems, Elsevier, London, 2019.

1 几种矩阵乘积的回顾
- 矩阵标准乘积定义及性质
- 矩阵Kronecker积定义及性质
- 矩阵Hadamard积定义与性质
- 矩阵Khatri-Rao积定义与性质

2 矩阵半张量积
- 矩阵半张量积定义
- 矩阵半张量积的性质

3 矩阵半张量积的准交换性

4 进阶导读
- 矩阵-矩阵半张量积
- 矩阵-向量半张量积
- 向量-向量的半张量积
- 保维数的矩阵半张量积

定义4.3.1 （向量-向量的半张量积定义）

设$x \in R^m$, $y \in R^n$, t为n 与m的最小公倍数, 则其半张量积可定义如下:

$$x \vec{\cdot} y := \left\langle (x \ltimes \mathbf{1}_{t/m}), (y \ltimes \mathbf{1}_{t/n}) \right\rangle,$$

这里, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是欧氏空间R^t 上的普通内积.

注4.3.1

向量-向量半张量积可用来定义泛维欧氏空间

$$R^\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

上的内积, 从而导出范数与之距离, 使R^∞ 成为一个道路连通的拓扑空间, 进而可构造微分流形结构.

1 几种矩阵乘积的回顾
- 矩阵标准乘积定义及性质
- 矩阵Kronecker积定义及性质
- 矩阵Hadamard积定义与性质
- 矩阵Khatri-Rao积定义与性质

2 矩阵半张量积
- 矩阵半张量积定义
- 矩阵半张量积的性质

3 矩阵半张量积的准交换性

4 进阶导读
- 矩阵-矩阵半张量积
- 矩阵-向量半张量积
- 向量-向量的半张量积
- 保维数的矩阵半张量积

定义4.4.1 （保维数的矩阵半张量积）

设$A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{p\times q}$. 那么, A与B的保维数的矩阵半张量积定义如下:

$$A \times B := \left(A \otimes \mathbf{1}_{t/n}^T\right)\left(B \otimes \mathbf{1}_{t/p}\right). \tag{16}$$

这里t为n 与p的最小公倍数.

注4.4.1

(i) 若$n = p$, 则

$$A \times B = AB.$$

(ii) 若$A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, 则$A \times B \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

问题4.4.1

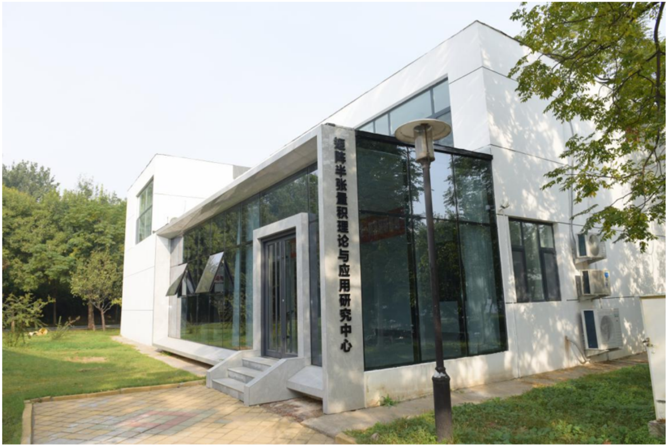
保维数的矩阵半张量积有什么数学性质？它又有哪些应用呢？

D. Cheng, From DK-STP to Non-square General Linear Algebra and General Linear Group, (preprint: http:arxiv.org/abs/2305.19794), 2023.

☞ 电子资源

- 程老师主页:
  http://lsc.amss.ac.cn/∼dcheng/
  Publications, STP Toolbox, Courses, Preprint
- 矩阵半张量积研究中心网站:
  http://m-stp.lcu.edu.cn/index.htm

➢ 矩阵半张量积理论与应用研究中心



你能定义一种矩阵的乘积吗？

谢谢！