什么是矩阵半张量积

4rd STP暑期班，第一讲

授课人：冯俊娥

矩阵半张量积理论与应用研究中心

2024/8/11-15

聊城大学

目录

1. 几种矩阵乘积的回顾
   - 矩阵标准乘积定义及性质
   - 矩阵Kronecker积定义及性质
   - 矩阵Hadamard积定义与性质
   - 矩阵Khatri-Rao积定义与性质
2. 矩阵半张量积
   - 矩阵半张量积定义
   - 矩阵半张量积的性质
   - 矩阵半张量积的准交换性
   - 矩阵半张量积的应用领域
3. 进阶导读
   - 矩阵-矩阵半张量积
   - 矩阵-向量半张量积
   - 向量-向量的半张量积
   - 保维数的矩阵半张量积
   - 伪矩阵半张量积

矩阵的创立人：英国数学家凯莱（A.Cayley）（来源于百度）

凯莱在1855年发表的一系列研究矩阵理论的文章中，引进了关于矩阵的一些定义，如矩阵相等、零矩阵、单位矩阵、矩阵的和、矩阵的乘积、矩阵的逆、转置矩阵、对称矩阵等，并借助于行列式定义了方阵的的特征方程和特征根。凯莱的工作奠定了矩阵论的基石，因此一般认为他是矩阵理论的创始人。

矩阵的思想追溯：中国汉朝

美国哥伦比亚特区大学Katz在其专著中指出: The idea of a matrix has a long history, dated at least from its use by Chinese scholars of the Han period for solving systems of linear equations.

矩阵的思想追溯：中国数学家

英国学者Crilly 提到: 公元前200年，中国数学家使用了数字阵列。

- V.J. Katz, A History of mathematics, Brief Version, Addison-Wesley, New York, 2004.
- T. Crilly, 50 Mathematical Ideas You Really Need to Know, 王悦译, “你不可不知的50个数学知识”, 人民邮电出版社, 北京, 2012

1. 几种矩阵乘积的回顾
   - 矩阵标准乘积定义及性质
   - 矩阵Kronecker积定义及性质
   - 矩阵Hadamard积定义与性质
   - 矩阵Khatri-Rao积定义与性质
2. 矩阵半张量积
   - 矩阵半张量积定义
   - 矩阵半张量积的性质
   - 矩阵半张量积的准交换性
   - 矩阵半张量积的应用领域
3. 进阶导读
   - 矩阵-矩阵半张量积
   - 矩阵-向量半张量积
   - 向量-向量的半张量积
   - 保维数的矩阵半张量积
   - 伪矩阵半张量积

定义1.1.1

设$A=(a_{ij})\in M_{m\times n}, B=(b_{ij})\in M_{n\times q}$,定义

$$AB=(c_{ij})\in M_{m\times q} \tag{1}$$

这里$c_{ij}=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$，$i=1,2,\cdots m; j=1,2,\cdots q.$

性质1.1.1

设A, B, C为适维矩阵，$a, b \in \mathbb{R}$，则有

1. 结合律
$$(AB)C = A(BC).$$
2. 分配律
$$A(aB + bC) = aAB + bAC,$$
$$(aA + bB)C = aAC + bBC.$$
3. $$(AB)^T = B^T A^T.$$
4. 设$A, B \in M_{n\times n}$均可逆，则
$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$
5. 设$A, B \in M_{n\times n}$,则
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$
6. 设$A, B \in M_{n\times n}$,则
$$tr(AB) = tr(BA).$$
7. $$rank(AB) \le \min\{rank(A), rank(B)\}.$$

1. 几种矩阵乘积的回顾
   - 矩阵标准乘积定义及性质
   - 矩阵Kronecker积定义及性质
   - 矩阵Hadamard积定义与性质
   - 矩阵Khatri-Rao积定义与性质
2. 矩阵半张量积
   - 矩阵半张量积定义
   - 矩阵半张量积的性质
   - 矩阵半张量积的准交换性
   - 矩阵半张量积的应用领域
3. 进阶导读
   - 矩阵-矩阵半张量积
   - 矩阵-向量半张量积
   - 向量-向量的半张量积
   - 保维数的矩阵半张量积
   - 伪矩阵半张量积

定义1.2.1

设$A=(a_{ij})\in M_{m\times n}, B=(b_{ij})\in M_{p\times q}$，则$A$与$B$的Kronecker积定义为：

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}\in M_{mp\times nq}. \tag{2}$$

例1.2.1

设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} 0B & B \\ -B & 0B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

性质1.2.1

设A, B, C为适维矩阵，$a, b \in \mathbb{R}$，则有

1. 结合律
$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$
2. 分配律
$$A \otimes (aB + bC) = a(A \otimes B) + b(A \otimes C),$$
$$(aA + bB) \otimes C = a(A \otimes C) + b(B \otimes C).$$
3. $$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T.$$
4. 设A, B均可逆，则
$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$
5. 设$A \in M_{m \times m}, B \in M_{n \times n}$，则
$$\det(A \otimes B) = \det(A)^n \det(B)^m.$$
6. 设$A \in M_{m \times m}, B \in M_{n \times n}$，则
$$tr(A \otimes B) = tr(A)tr(B).$$
7. $$rank(A \otimes B) = rank(A)rank(B).$$

性质1.2.2

设$A \in M_{m\times n}, B \in M_{p\times q}, C \in M_{n\times r}, D \in M_{q\times s}$，则

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD).$$

特别地，

$$A \otimes B = (A \otimes I_p)(I_n \otimes B).$$

性质1.2.3

1. 设$X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^n$为两列向量，则

$$V_c(XY^T) = Y \otimes X.$$

2. 设$A \in M_{m\times p}, B \in M_{p\times q}, C \in M_{q\times n}$，则

$$V_c(ABC) = (C^T \otimes A)V_c(B).$$

V_c是将矩阵按列展成一个列向量.

1. 几种矩阵乘积的回顾
   - 矩阵标准乘积定义及性质
   - 矩阵Kronecker积定义及性质
   - 矩阵Hadamard积定义与性质
   - 矩阵Khatri-Rao积定义与性质
2. 矩阵半张量积
   - 矩阵半张量积定义
   - 矩阵半张量积的性质
   - 矩阵半张量积的准交换性
   - 矩阵半张量积的应用领域
3. 进阶导读
   - 矩阵-矩阵半张量积
   - 矩阵-向量半张量积
   - 向量-向量的半张量积
   - 保维数的矩阵半张量积
   - 伪矩阵半张量积

定义1.3.1

设$A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in M_{m\times n}$，则$A$与$B$的Hadamard积定义为：

$$A\odot B=(a_{ij}b_{ij})\in M_{m\times n}. \tag{3}$$

例1.3.1

设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 7 & 8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 0\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$A\odot B=\begin{pmatrix}-1 & 10 & 0\\ 24 & -21 & 8\end{pmatrix}.$$

性质1.3.1

设A, B, C为适维矩阵，$a, b \in \mathbb{R}$，则有

1. 交换律
$$A \odot B = B \odot A.$$
2. 结合律
$$(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C).$$
3. 分配律
$$(aA + bB) \odot C = a(A \odot C) + b(B \odot C).$$
4. $$(A \odot B)^T = A^T \odot B^T.$$
5. 设$A, B \in M_n$是对称阵，若$A \geq 0, B \geq 0$，则
$$\det(A \odot B) \geq \det(A)\det(B).$$

性质1.3.2

设$A, B \in M_n$是对称阵，

- 若$A \geq 0, B \geq 0$，则$A \odot B \geq 0$;
- 若$A > 0, B > 0$，则$A \odot B > 0$,

这里$A \geq (>) 0$ 表示矩阵A半正定(正定).

1. 几种矩阵乘积的回顾
   - 矩阵标准乘积定义及性质
   - 矩阵Kronecker积定义及性质
   - 矩阵Hadamard积定义与性质
   - 矩阵Khatri-Rao积定义与性质
2. 矩阵半张量积
   - 矩阵半张量积定义
   - 矩阵半张量积的性质
   - 矩阵半张量积的准交换性
   - 矩阵半张量积的应用领域
3. 进阶导读
   - 矩阵-矩阵半张量积
   - 矩阵-向量半张量积
   - 向量-向量的半张量积
   - 保维数的矩阵半张量积
   - 伪矩阵半张量积

定义1.4.1

设$n, m, p, q, n_i, m_j, p_i, q_j, (i = 1 \cdots r, j = 1 \cdots s)$均为正整数，且满足

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = m, \sum_{j=1}^{s} n_j = n, \sum_{i=1}^{r} p_i = p, \sum_{j=1}^{s} q_j = q,$$

$A = (A_{ij}) \in M_{m\times n}, B = (B_{ij}) \in M_{p\times q}$为分块矩阵，其中$A_{ij} \in M_{m_i\times n_j}$, $B_{ij} \in M_{p_i\times q_j}$,即

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}.$$

定义矩阵A和B的Khatri-Rao积为：

$$A * B = (A_{ij} \otimes B_{ij}) \in M_{u\times v}, \tag{4}$$

其中$u = \sum_{i=1}^{r} m_i p_i, v = \sum_{j=1}^{s} n_j q_j$.

例1.4.1

设

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c:cc:cc} 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right],$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c:c} 3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

则

$$A * B = \begin{pmatrix} A_1 \otimes B_1 & A_2 \otimes B_2 & A_3 \otimes B_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc:cc:cc} 3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 6 & 8 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

注1.4.1

1. 若$r = s = 1$, 则$A * B = A \otimes B$;
2. 若$m = p, n = q, m_1 = m_2 = \cdots = m_r = n_1 = n_2 = \cdots = n_s = 1$, 则$A * B = A \odot B$;
3. 若$A \in M_{m\times r}$, $B \in M_{n\times r}$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_r \end{pmatrix}$, 则
$$A * B = \begin{pmatrix} A_1 \otimes B_1 & A_2 \otimes B_2 & \cdots & A_r \otimes B_r \end{pmatrix};$$
4. 同样两个矩阵, 划分不同, 乘积结果也不同.

性质1.4.1

1. 结合律：设$A \in M_{m\times r}$，$B \in M_{n\times r}$，$C \in M_{p\times r}$，则
$$(A * B) * C = A * (B * C).$$

2. 分配律：设$A, B \in M_{m\times r}$，$C \in M_{n\times r}$，$a, b \in \mathbb{R}$，则
$$A * (aB + bC) = a(A * B) + b(A * C),$$
$$(aA + bB) * C = a(A * C) + b(B * C).$$

1 几种矩阵乘积的回顾
- 矩阵标准乘积定义及性质
- 矩阵Kronecker积定义及性质
- 矩阵Hadamard积定义与性质
- 矩阵Khatri-Rao积定义与性质

2 矩阵半张量积
- 矩阵半张量积定义
- 矩阵半张量积的性质
- 矩阵半张量积的准交换性
- 矩阵半张量积的应用领域

3 进阶导读
- 矩阵-矩阵半张量积
- 矩阵-向量半张量积
- 向量-向量的半张量积
- 保维数的矩阵半张量积
- 伪矩阵半张量积

2.1.1

设$X \in \mathbb{R}_{1\times np}$，$Y \in \mathbb{R}_{p\times 1}$，将$x$等分成$p$块，$X = \begin{pmatrix} X^1 & X^2 & \cdots & X^p \end{pmatrix}$，定义矩阵$A$和$B$ 的半张量积为

$$X \ltimes Y = \sum_{i=1}^{p} X^i y_i \in \mathbb{R}_{1\times n}. \tag{5}$$

定义2.1.2

设$A \in M_{m\times n}$，$B \in M_{p\times q}$，t为n和p的最小公倍数，定义矩阵A和B 的半张量积为

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{t/n})(B \otimes I_{t/p}) \in M_{(mt/n)\times(qt/p)}. \tag{6}$$

注2.1.1

- 当$n = p$，则有$A \ltimes B = AB$;
- 当$n = rp$，记$A \succ_r B$，则有$A \ltimes B = A(B \otimes I_r)$;
- 当$rn = p$，记$A \prec_r B$，则有$A \ltimes B = (A \otimes I_r)B$.

Cheng D Z. Semi-tensor product of matrices and its application to Morgan’ s problem. Science In China (Series F), Vol. 44(3): 195-212, 2001.

Cheng D Z, Qi H, Li Z. Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach. London: Springer, 2011.

例2.1.1

1. 设$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, 则

$$X\ltimes Y=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\cdot 1+\begin{pmatrix}3 & -1\end{pmatrix}\cdot 2=\begin{pmatrix}7 & 0\end{pmatrix}.$$

2. 设$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T$, 则

$$X\ltimes Y=1\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}.$$

3. 设$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\2 & 3 & 1 & 2\\3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & -1\end{pmatrix}$, 则

$$A\ltimes B=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -3 & -5\\4 & 7 & -5 & -8\\5 & 2 & -7 & -4\end{pmatrix}$$

例2.1.1续

4. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\end{pmatrix}$, 则

$$A\ltimes B=(A\otimes I_2)(B\otimes I_3)$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&2&0&1&0\\0&1&0&2&0&1\\2&0&3&0&1&0\\0&2&0&3&0&1\\3&0&2&0&1&0\\0&3&0&2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&0&0\\0&1&0&0&-2&0\\0&0&1&0&0&-2\\2&0&0&-1&0&0\\0&2&0&0&-1&0\\0&0&2&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&2&0&1&0\\0&1&0&2&0&1\\2&0&3&0&1&0\\0&2&0&3&0&1\\3&0&2&0&1&0\\0&3&0&2&0&1\end{pmatrix}$$

1 几种矩阵乘积的回顾
- 矩阵标准乘积定义及性质
- 矩阵Kronecker积定义及性质
- 矩阵Hadamard积定义与性质
- 矩阵Khatri-Rao积定义与性质

2 矩阵半张量积
- 矩阵半张量积定义
- 矩阵半张量积的性质
- 矩阵半张量积的准交换性
- 矩阵半张量积的应用领域

3 进阶导读
- 矩阵-矩阵半张量积
- 矩阵-向量半张量积
- 向量-向量的半张量积
- 保维数的矩阵半张量积
- 伪矩阵半张量积

性质2.2.1

设A, B, C为适维矩阵，$a, b \in \mathbb{R}$，则有

1. 结合律

$$(A \ltimes B) \ltimes C = A \ltimes (B \ltimes C).$$

2. 分配律

$$A \ltimes (aB + bC) = a(A \ltimes B) + b(A \ltimes C),$$
$$(aA + bB) \ltimes C = a(A \ltimes C) + b(B \ltimes C).$$

3. $$(A \ltimes B)^T = B^T \ltimes A^T.$$

4. 设A，B均可逆，则

$$(A \ltimes B)^{-1} = B^{-1} \ltimes A^{-1}.$$

性质2.2.2

设 A 与 B 均为方阵, 则

1. $A \ltimes B$ 与 $B \ltimes A$ 有相同的特征函数;
2. $$tr(A \ltimes B) = tr(B \ltimes A)$$
3. 如果 A 或 B 可逆, 则 $A \ltimes B \sim B \ltimes A$, "$\sim$" 表示矩阵相似;
4. 如果 A 与 B 均为上三角 (下三角、对角阵或正交阵), 那么, $A \ltimes B$ 也是上三角 (下三角、对角阵或正交阵);
5. 设$A \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, t为m和n的最小公倍数, 那么
$$det(A \ltimes B) = [det(A)]^{t/m}[det(B)]^{t/n}.$$

性质2.2.3 向量的半张量积与张量积可以互相转化

设 $X \in R^m$, $Y \in R^n$ 为两个列(行)向量, 则

$$X \ltimes Y = X \otimes Y.$$

引入一个记号: 设 $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{p\times q}$, 定义 A 与 B 的比例为

$$A : B \triangleq n : p.$$

定义2.2.1

设 $A : B = n : p$, 分块

$$A = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} & \cdots & A^{1l} \\ A^{21} & A^{22} & \cdots & A^{2l} \\ \vdots & & & \\ A^{s1} & A^{s2} & \cdots & A^{sl} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B^{11} & B^{12} & \cdots & B^{1t} \\ B^{21} & B^{22} & \cdots & A^{2t} \\ \vdots & & & \\ B^{l1} & B^{l2} & \cdots & B^{lt} \end{bmatrix} \tag{7}$$

称为一个恰当分割 (proper division), 如果

$$A^{i\alpha} : B^{\alpha j} = n : p, \quad i = 1, 2, \cdots, s; \ j = 1, 2, \cdots, t.$$

定理2.2.1

设 $A:B=n:p$, 分块 (7) 为一个恰当分割, 则$A \ltimes B = \left(C^{ij}\right)$, 其中$C^{ij}=\sum_{k=1}^{l} A^{ik} \ltimes B^{kj}$.

推论2.2.1

设在 (7) 中 A 为列均分, 即 A^{ij}, $j=1,\cdots,l$ 的列数相等, B 为行均分, 即 B^{ij}, $i=1,\cdots,l$ 的行数相等, 则该分割为一恰当分割. 因此, 分块乘法成立.

推论2.2.2

设 $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$, $B\in\mathcal{M}_{p\times q}$, 则

$$A \ltimes B := \left(C^{ij} \mid i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,q\right), \tag{8}$$

这里

$$C^{ij}=Row_i(A) \ltimes Col_j(B).$$

例2.2.1（标准积结合律的反例）

设$X, Y, Z, W \in \mathbb{R}^n$都是列向量，计算$XY^TZW^T$. 显然有下式成立

$$(XY^T)(ZW^T) = X(Y^TZ)W^T = (Y^TZ)(XW^T) \in M_{n\times n}. \tag{9}$$

若继续用结合律则有

$$(Y^TZ)(XW^T) = Y^T(ZX)W^T. \tag{10}$$

此处ZX在矩阵乘法中是不相容的，但是用半张量积则不会出现矛盾，我们有下式成立

$$(Y^TZ)(XW^T) = Y^T \ltimes (Z \ltimes X) \ltimes W^T. \tag{11}$$

1 几种矩阵乘积的回顾
- 矩阵标准乘积定义及性质
- 矩阵Kronecker积定义及性质
- 矩阵Hadamard积定义与性质
- 矩阵Khatri-Rao积定义与性质

2 矩阵半张量积
- 矩阵半张量积定义
- 矩阵半张量积的性质
- 矩阵半张量积的准交换性
- 矩阵半张量积的应用领域

3 进阶导读
- 矩阵-矩阵半张量积
- 矩阵-向量半张量积
- 向量-向量的半张量积
- 保维数的矩阵半张量积
- 伪矩阵半张量积

命题2.3.1 （伪交换律）

设$A \in M_{m\times n}$，

- 若$Z \in \mathbb{R}^t$为一行向量，则$A \ltimes Z = Z \ltimes (I_t \otimes A)$;
- 若$Z \in \mathbb{R}^t$为一列向量，则$Z \ltimes A = (I_t \otimes A) \ltimes Z$.

定义2.3.1 （换位矩阵）

定义 (m,n)-维换位矩阵如下:

$$
\begin{aligned}
W_{[m,n]} &:= \left[I_n \otimes \delta_m^1, I_n \otimes \delta_m^2, \cdots, I_n \otimes \delta_m^m\right] \\
&= \left[\delta_n^1 \ltimes \delta_m^1 \cdots \delta_n^n \ltimes \delta_m^1 \cdots \delta_n^1 \ltimes \delta_m^m \cdots \delta_n^n \ltimes \delta_m^m\right] \\
&= \begin{bmatrix} I_m \otimes (\delta_n^1)^T \\ \vdots \\ I_m \otimes (\delta_n^n)^T \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

其中δ_m^i 为m维单位矩阵的第i列.

例2.3.1

$$
W_{[2,3]} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (11) & (12) & (13) & (21) & (22) & (23) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (11) \\ (21) \\ (12) \\ (22) \\ (13) \\ (23) \end{array}
$$

命题2.3.2 （换位矩阵的性质）

$$W_{[m,n]}^T := W_{[n,m]}, \quad W_{[m,n]}^{-1} := W_{[m,n]}^T.$$

命题2.3.3

- 设 $X \in R^m$, $Y \in R^n$ 为两个列向量, 则

$$W_{[m,n]} X \ltimes Y = Y \ltimes X.$$

- 设 $X \in R^m$, $Y \in R^n$ 为两个行向量, 则

$$X \ltimes Y W_{[m,n]} = Y \ltimes X.$$

矩阵半张量积的优点

1. 打破了维数的限制
2. 普通矩阵乘法的推广
3. 几乎保持所有传统矩阵乘法的性质
4. 可以表示任意阶次线性映射
5. 有一定的可交换性

矩阵半张量积–新工具

1. 中国科学院程代展研究员打破了普通矩阵乘法对于维数的限制，提出的一种新的矩阵乘积——矩阵半张量积(Semi-Tensor Product of Matrices)，将传统矩阵乘积推广到更一般情况. 利用矩阵半张量积方法，可以将繁杂的逻辑动态演化过程转化为简洁的离散迭代形式.
2. 中国科学院郭雷院士给予了高度评价，称“矩阵的半张量积可能会成为计算机时代呼唤的新的数学工具之一，以实现基于计算发现新现象，解决新问题的目的”.

Cheng D Z, Qi H S. A linear representation of dynamics of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(10):2251–2258.

郭雷. 评“矩阵的半张量积: 一个便捷的新工具”[J]. 科学通报, 2011, 56(32): 2662-2663.

☞ 国际上有关STP的专著

Chapter 9: Semi-Tensor Product Approach

“This book gives a brief introduction to the semi-tensor product approach that was proposed and developed by Daizhan Cheng and his colleagus, because many studies have recently been done based on this approach.”

T. Akusu, Algorithms for Analysis, Inference, and Control of Boolean Networks, World Scientific, Sigapore, 2018.

Appendix 2: Semi-Tensor Product

“The second one (appendix) sketches the important theory of Daizhan Cheng.”

S.E. Vlad, Boolean Systems: Topics in Asynchronicity, Elsevier, London, 2023.

1 几种矩阵乘积的回顾
- 矩阵标准乘积定义及性质
- 矩阵Kronecker积定义及性质
- 矩阵Hadamard积定义与性质
- 矩阵Khatri-Rao积定义与性质

2 矩阵半张量积
- 矩阵半张量积定义
- 矩阵半张量积的性质
- 矩阵半张量积的准交换性
- 矩阵半张量积的应用领域

3 进阶导读
- 矩阵-矩阵半张量积
- 矩阵-向量半张量积
- 向量-向量的半张量积
- 保维数的矩阵半张量积
- 伪矩阵半张量积

矩阵半张量积的应用领域

1. 系统生物学（逻辑网络）
2. 有限博弈论
3. 密码学（非线性移位寄存器）
4. 多智能体同步与队列控制
5. 有限自动机
6. 故障诊断与数字电路设计
7. 网络查询与遥操作
8. 内燃发动机
9. 智能家居
10. 变维系统
11. 模糊系统、模糊逻辑系统
12. 量子控制系统
13. 图像识别、压缩感知（STP-CS技术）
14. 高阶张量Tucker 形式的近似
15. 有限维代数、有限值代数、高维数组(高维矩阵)
16. 图论……

系统生物学

- Li F F. On the logical control of Markovian jump Boolean networks: A generalization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022, 53(3): 1872-1881.
- Li F F, Tang Y. Multi-sensor fusion Boolean Bayesian filtering for stochastic Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022, DOI: 10.1109/TNNLS.2021.3138132.
- Li F F, Tang Y. Pinning controllability for a Boolean network with arbitrary disturbance inputs[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(6): 3338-3347.
- Li R, Yang M, Chu T G. State feedback stabilization for Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(7): 1853–1857.
- Li H T, Wang Y Z. Output feedback stabilization control design for Boolean control networks[J]. Automatica, 2013, 49(12): 3641–3645.
- Lu J, Li H, Liu Y, Li F. Survey on semi-tensor product method with its applications in logical networks and other finite-valued systems[J]. IET Control Theory and Application, 2017, 11(13): 2040-2047.
- Zhang K Z, Zhang L J. Controllability of probabilistic Boolean control networks with time-variant delays in states[J]. Sci China Inf Sci, 2016, 59: 92204.
- Fornasini E, Valcher M.E. Recent developments in Boolean networks control, J. Control Dec. 2016, 3(1): 1－18.

博弈论

- Guo P L, Wang Y Z, Li H T. Algebraic formulation and strategy optimization for a class of evolutionary networked games via semi-tensor product method[J]. Automatica, 2013, 49(11):3384–3389.
- Cheng D Z. On finite potential games[J]. Automatica, 2014, 50(7):1793–1801.
- Cheng D Z, He F H, Qi H S, Xu T T. Modeling, analysis and control of networked evolutionary games[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(9):2402–2415.
- Li C X, He F H, Liu T,Cheng D Z. Symmetry-based decomposition of finite games[J]. Sci China Inf Sci, 2019, 62: 012207.
- Cheng D Z, Qi H S, Liu Z Q. From STP to game-based control[J]. Sci China Inf Sci, 2018, 61: 010201.
- Hao Y Q, Cheng D Z. Finite element approach to continuous potential games[J]. Sci China Inf Sci, 2021, 64: 149202.

密码学

- Zhong, J H, Lin, D D. Decomposition of nonlinear feedback shift registers based on Boolean networks[J]. Sci China Inf Sci, 2019, 62(3): 039110.
- Zhao D W, Peng H P, Li L X, Hui S L, Yang Y X. Novel way to research nonlinear feedback shift register[J]. Sci China Inf Sci, 2014, 57(9): 1–14.
- Lu J Q, Li M L, Huang T W, Liu Y, Cao J D. The transformation between the Galois NLFSRs and the Fibonacci NLFSRs via semi-tensor product of matrices[J]. Automatica, 2018, 96: 393–397.
- Liu Z B, Wang Y Z, Cheng D Z. Nonsingularity of feedback shift registers[J]. Automatica, 2015, 55: 247-253.
- Zhong J H, Lin D D. Decomposition of nonlinear feedback shift registers based on Boolean networks[J]. Sci China Inf Sci, 2019, 62: 39110.
- Zhong J H, Lin D D. Stability of nonlinear feedback shift registers[J]. Sci China Inf Sci, 2016, 59: 1-12.

多智能体同步与队列控制

- Wang Y Z, Zhang C H, Liu Z B. A matrix approach to graph maximum stable set and coloring problems with application to multi-agent systems[J]. Automatica, 2012 48(7):1227–1236.
- Li R, Chu T. Complete synchronization of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems, 2012, 23(5):840-846.
- Zhang L Q, Feng J E, Mix-valued logic-based formation control[J]. International Journal of Control, 2013, 86(6):1191-1199.

有限自动机

- Xu X R, Hong Y G. Matrix expression and reachability analysis of finite automata[J]. Journal of Control Theory & Applications, 2012, 10(2):210–215.
- Xu X R, Hong Y G. Observability analysis and observer design for finite automata via matrix approach[J]. IET Control Theory & Applications, 2013, 7(12):1609–1615.
- Yan Y Y, Chen Z Q, Liu Z X. Semi-tensor product approach to controllability and stabilizability of finite automata[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2015, 26(1):134–141.
- Zhang K Z, Zhang L J. Observability of Boolean control networks: a unified approach based on finite automata[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(9):2733–2738.
- Wang B, Feng J E, Meng M. Matrix approach to model matching of composite asynchronous sequential machines[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(13): 2122-2130.

故障诊断与数字电路设计

Li H T, Wang Y Z. Boolean derivative calculation with application to fault detection of combinational circuits via the semi-tensor product method[J]. Automatica, 2012, 48(4):688–693.

欧阳城添, 江建慧. 基于概率转移矩阵的时序电路可靠度估计方法[J]. 电子学报, 2013, 41(1):171–177.

网络查询与遥操作

陈宜滨, 席宁, 缪磊, 李洪谊, 王越超. 半张量积理论在网络遥操作系统中的应用[J]. 机器人, 2012, 34(1):50–55.

Liu X H, Yong X U. An inquiry method of transit network based on semi-tensor product[J]. Complex Systems & Complexity Science, 2013, 10(1):38–44.

网智能家居、工程问题

- Kabir M H, Hoque M R, Koo B J, Yang S H. Mathematical modelling of a context-aware system based on Boolean control networks for smart home[C]. Consumer Electronics (ISCE 2014), The 18th IEEE International Symposium on. IEEE, 2014: 1-2.
- 梅生伟，刘锋，薛安成. 电力系统暂态分析中的半张量积方法[M]. 清华大学出版社, 2010.
- Wu Y H, Shen T L. A logical dynamical systems approach to modeling and control of residual gas fraction in IC engines[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2013, 46(21): 495-500.
- Wu Y H, Shen T L. Policy iteration approach to control residual gas fraction in ic engines under the framework of stochastic logical dynamics[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2016, 99:1–8.
- Li H T, Zhao G D, Meng M, Feng J E. A survey on applications of semi-tensor product method in engineering, Sci China Inf Sci[J]. 2018, 61:010202.
- Zhang Z, Leifeld T, Zhang P. Reconstructibility analysis and observer design for Boolean control networks. IEEE Trans. Control Netw. Syst.[J], 2020, 7(1): 516-528.

量子控制、模糊系统

- Qi H S, Mu B Q, Petersen I R, Shi G D, Measurement-induced Boolean dynamics and controllability for closed quantum networks. Automatica, 2020, 114:108816.
- Qi H, Mu B. Mu, Petersen I.R., et al. Measurement-Induced Boolean Dynamicsfor Open Quantum Networks. IEEE Trans. Control Netw. Syst., In press, 2023.
- Lyu H, Wang W, Liu X. Universal approximation of multi-variable fuzzy systems by semi-tensor product. IEEE Trans. Fuzzy Syst., 2020, 28(11): 2972-2981.
- Lyu H, Wang W, Liu X. Modeling of multi-variable fuzzy systems by semitensor product. IEEE Trans. Fuzzy Syst., 2020, 28(2): 228-235.
- Lyu H, Wang W, Liu X. Parameter identification and optimization of continuous MIMO fuzzy control systems by semi-tensor product. Fuzzy Sets Syst., 2021, DOI: 10.1016/j.fss.2021.06.004.
- Fan H, Feng J, Meng M, Wang B. General decomposition of fuzzy relations: semi-tensor product approach. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 384: 75-90.
- Ge A, Chang Z, Feng J. Interval Type-2 Fuzzy Relation Matrix Model via Semi-Tensor Product. IEEE Trans. Fuzzy Syst., has been accepted.

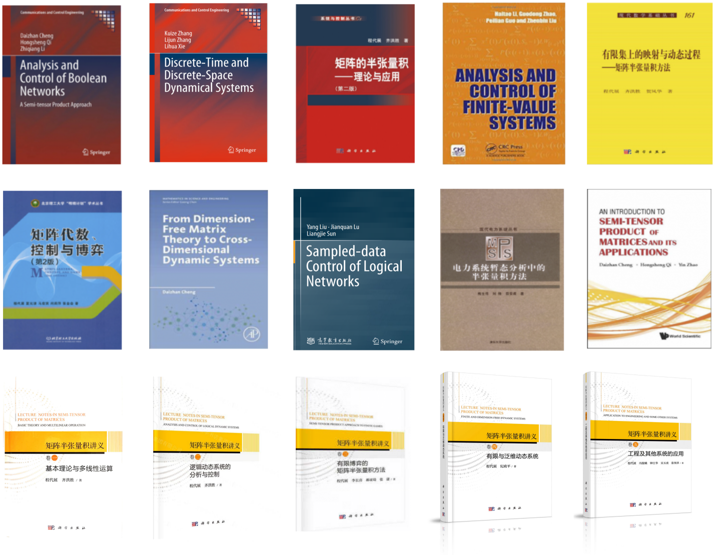
变维系统

- Cheng D Z, Xu Z, Shen T, Equivalence-based model of dimension -varying linear systems, IEEE Trans. Aut. Contr., vol. 65, no. 12, pp. 5444-5449, 2020.
- Liu Y N, Li H T. Relations of controllability and observability between continuous-time linear system and its projective system, 2021 40th Chinese Control Conference (CCC), Shanghai, China, 2021, 526-531.
- Zhang Q L, Wang B, Feng J E. Solution and stability of continuous-time cross-dimensional linear systems. Frontiers of Information Technology and Electronic Engineering, 2021, 22(2): 210-221.
- Feng J E, Wang B, Yu Y Y. On dimensions of linear discrete dimension-unbounded systems. International Journal of Control Automation and Systems, 2021,19(1): 471-477.
- Li Y L, Li H T, Feng J E, Li J J. Reachability of dimension-bounded linear systems. Mathematical Biosciences and Engineering, 2022, 20(1): 489-504.
- Zhang K Z, Johansson K H. Long-term behavior of cross-dimensional linear dynamical systems. Proceedings of 2018 37th Chinese Control Conference(CCC). Wuhan, China: IEEE, 2018: 158-163.

压缩感知（STP-CS技术）

- Chai, XL ...Han, Daojun*, Exploiting Semi-Tensor Product Compressed Sensing and Hybrid Cloud for Secure Medical Image Transmission, IEEE INTERNET OF THINGS JOURNAL, 2023, 10(8), 7380-7392. （河南大学，南航）
- Wen, WY...Fang, YM* ..., A visually secure image encryption scheme based on semi-tensor product compressed sensing. SIGNAL PROCESSING, 2020, 173, 107580. （江西财经、河南师范大学、重庆工商大学）
- Hou, JY*, Liu, XL, Semi-tensor product -based one-bit compressed sensing. EURASIP JOURNAL ON ADVANCES IN SIGNAL PROCESSING, 2023(1): 112. (华西师范大学)
- Fu, W*, Li, ST*, SEMI-TENSOR COMPRESSED SENSING FOR HYPERSPECTRAL IMAGE. IEEE International Symposium on Geoscience and Remote Sensing IGARSS, 2018, 2737-2740. (湖南大学)
- Liang, JY...Li, LX (Li, Lixiang)... Construction of Structured Random Measurement Matrices in Semi-Tensor Product Compressed Sensing Based on Combinatorial Designs. SENSORS, 2022, 22(21),8260. (北邮、齐鲁工业大学)
- Fu, J, Guo, PL*,Visually secure encryption embedded with multiple types of images using semi-tensor product compressed sensing， PHYSICA SCRIPTA, 2024, 99(8), 8260. (山师)
- Xu, B, ..., Han TL*,..., Joint Compression and Encryption of Distributed Sources Based on Wavelet Transform and Semi-Tensor Product Compressed Sensing, IEEE SENSORS JOURNAL, 2022, 22(16),16451-16463. (长春理工大学)
- 王金铭...,半张量积压缩感知模型的快速重构方法, 通信学报, 2018,39(7), 26-38. (浙江树人大学)
- Deng, Y...,An image compression encryption based on the semi-tensor product and the DFT measurement matrix, Optik, 2023, 171175. (四川大学)
- Zhang, S...,A visually secure image encryption method based on semi-tensor product compressed sensing and IWT-HD-SVD embedding, HELIYON, 2023, 9(12),e22548. (大连大学)

矩阵半张量积的应用领域



国内外研究团队

国内100多个研究团队			
中国科学院数学与系统研究院	浙江大学	南京师范大学	山东大学
中国科学院信息工程研究所	浙江师范大学	南京邮电大学	青岛大学
北京大学	华南理工大学	安徽师范大学	山东师范大学
清华大学	湖南大学	西南财经大学	聊城大学
北京邮电大学	哈尔滨工程大学	重庆师范大学	山东科技大学
北京理工大学	哈尔滨工业大学	天津工业大学	山东财经大学
北京电力大学	扬州大学	西南民族大学	齐鲁工业大学
香港城市大学	东南大学	西北工业大学	潍坊学院
香港大学	河北工业大学	汕头大学	山东建筑大学
澳门大学	河南理工大学	合肥工业大学	青岛农业大学
西南财经政法大学	河南科技大学	同济大学	德州学院
内蒙古财经大学	西安电子科技大学	华东理工大学	济南大学
河南财经政法大学	大连理工大学	上海交通大学	中南大学

国内外研究团队

国内100多个研究团队			
陕西学前师范学院	华侨大学	北京科技大学	重庆理工大学
中国科学院沈阳自动化研究所	浙江树人大学	大连大学	陕西师范大学
桂林电力科技大学	延安大学	哈尔滨理工大学	复旦大学
长沙理工大学	中国民航大学	河南大学	长春科技大学
北京航空航天大学	重庆邮电大学	桂林电子科技大学	浙江工业大学
南京航空航天大学	南昌大学	西华师范大学	天津科技大学
西北理工大学	贵州大学	哈尔滨科技大学	大连海事大学
华东师范大学	闽南师范大学	上海第二工业大学	榆林学院
北京交通大学	广西财经大学	四川轻化工大学	南开大学
中国人民解放军国防科技大学	中国石油公司	伊犁师范大学	温州大学
宁波工程学院	安阳师范大学	南京林业大学	上海大学
中国北方车辆研究所	香港理工大学	太原理工大学	衡水学院
中国人民解放军海军军医大学	宁波科技大学	电子科技大学	北华大学......

矩阵半张量积的应用领域

国内外研究团队 国际上有50多个国家

1,306 results from All Databases for:

Analyze Results | Citation Report | Create Alert

semi tensor product of matrix (Topic)

Search

Add Keywords | Quick add keywords: SEMI TENSOR PRODUCT OF MATRICES | SEMI TENSOR PRODUCT | SEMI TENSOR PRODUCT STP OF MATRICES | SEMI TENSOR PRODUCT STP

Refined By: NOT Database: Preprint Citation Index | Clear all

Publications | You may also like... | Copy query link

Back to all filters

Export to Excel

Refine by Countries/Regions

Search for Countries/Regions

Select all

Results count

CHINA	957	BELGIUM	6	CZECH REPUBLIC	2
PEOPLES R CHINA	948	POLAND	6	ISRAEL	2
USA	47	UK	6	JORDAN	2
SAUDI ARABIA	35	EGYPT	5	MOROCCO	2
GERMANY	27	PAKISTAN	5	SCOTLAND	2
SINGAPORE	22	THAILAND	5	SOUTH AFRICA	2
FRANCE	21	DENMARK	4	TUNISIA	2
JAPAN	20	HONG KONG	4	BANGLADESH	1
INDIA	18	IRAN	4	CHILE	1
ITALY	18	TURKEY	4	HUNGARY	1
CANADA	11	BAHRAIN	3	MADAGASCAR	1
BRAZIL	10	FINLAND	3	MALAYSIA	1
AUSTRALIA	9	SPAIN	3	NETHERLANDS	1
ENGLAND	8	SWEDEN	3	NEW ZEALAND	1
QATAR	8	SWITZERLAND	3	NORTH KOREA	1
SOUTH KOREA	8	TURKIYE	3	SERBIA	1
UNITED STATES	8	ALGERIA	2	U ARAB EMIRATES	1
PEOPLES REP OF CHINA	7	AUSTRIA	2	WALES	1
RUSSIA	7	CAMEROON	2		

矩阵半张量积的应用领域

国内外研究团队 国际上有50多个国家

2,182 results from All Databases for:

Analyze Results | Citation Report | Create Alert

semi tensor product (Topic) | Search

Add Keywords | Quick add keywords: SEMI TENSOR PRODUCT | SEMI TENSOR PRODUCT OF MATRICES | SEMI TENSOR PRODUCT STP | BOOLEAN CONTROL NETWORK | BOOLE

Refined By: NOT Database: Preprint Citation Index | Clear all

Publications | You may also like... | Copy query link

Back to all filters

Export to Excel

Refine by Countries/Regions

Search for Countries/Regions

Select all

Results count

PEOPLES R CHINA	1,207	SOUTH AFRICA	11	UKRAINE	3
CHINA	1,194	DENMARK	10	ARGENTINA	2
USA	178	QATAR	10	BULGARIA	2
GERMANY	100	ROMANIA	9	COLOMBIA	2
FRANCE	64	PAKISTAN	8	FED REP GER	2
SAUDI ARABIA	60	SWEDEN	8	IRELAND	2
INDIA	55	THAILAND	8	USSR	2
JAPAN	54	TUNISIA	8	WALES	2
CANADA	52	ALGERIA	7	BANGLADESH	1
UNITED STATES	46	NETHERLANDS	7	BOSNIA HERCEG	1
ITALY	38	TURKIYE	7	CROATIA	1
ENGLAND	37	MOROCCO	6	DOMINICAN REP	1
SINGAPORE	28	TAIWAN	6	ECUADOR	1
POLAND	27	BAHRAIN	5	ESTONIA	1
RUSSIA	27	CHILE	5	IRAQ	1
BELGIUM	22	CZECH REPUBLIC	5	MADAGASCAR	1
UK	22	HONG KONG	5	MONTENEGRO	1
BRAZIL	21	JORDAN	5	NEW ZEALAND	1
SOUTH KOREA	19	MALAYSIA	5	NORTH IRELAND	1
AUSTRALIA	17	PORTUGAL	5	NORTH KOREA	1
ISRAEL	17	SCOTLAND	5	NORTHERN IRELAND	1
TURKEY	17	CAMEROON	4	NORWAY	1
SPAIN	15	FINLAND	4	OMAN	1
SWITZERLAND	15	GREECE	4	PUERTO RICO	1
EGYPT	13	HUNGARY	4	SLOVENIA	1

1 几种矩阵乘积的回顾
- 矩阵标准乘积定义及性质
- 矩阵Kronecker积定义及性质
- 矩阵Hadamard积定义与性质
- 矩阵Khatri-Rao积定义与性质

2 矩阵半张量积
- 矩阵半张量积定义
- 矩阵半张量积的性质
- 矩阵半张量积的准交换性
- 矩阵半张量积的应用领域

3 进阶导读
- 矩阵-矩阵半张量积
- 矩阵-向量半张量积
- 向量-向量的半张量积
- 保维数的矩阵半张量积
- 伪矩阵半张量积

定义3.1.1 （右半张量积）

在矩阵的左半张量积的定义式中，如果将单位阵换到左边，可得

$$A \rtimes B = \left(I_{t/n} \otimes A\right)\left(I_{t/p} \otimes B\right).$$

它称为矩阵的右半张量积.

(i) 它也是矩阵普通积的推广.

(ii) 它也满足矩阵乘积的一般要求，即满足结合律与分配律.

因此，每一种矩阵左半张量积都可以构造相应的右半张量积.

定义3.1.2 （矩阵乘子）

在矩阵的左半张量积的定义式中，我们用单位阵$\{I_k \mid k = 1, 2, \cdots\}$ 放大矩阵维数．这里$\{I_k \mid k = 1, 2, \cdots\}$ 称为矩阵乘子．任何一族方阵

$$\{\Gamma_k \in \mathcal{M}_{k\times k} \mid k = 1, 2, \cdots\}$$

都可以称为有效的矩阵乘子，如果用它定义出来的矩阵半张量积满足：

(i) 它是矩阵普通积的推广．

(ii) 它满足结合律与分配律．

定义3.1.3：依赖于矩阵乘子的矩阵半张量积

设$\Gamma = \{\Gamma_n | n \ge 1\}$为一矩阵乘子，$A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{p\times q}$．那么，$A$与$B$基于乘子$\Gamma$的矩阵-矩阵左半张量积定义如下：

$$A \ltimes_\Gamma B := (A \otimes \Gamma_{t/n})(B \otimes \Gamma_{t/p}), \tag{12}$$

这里t为n 与p的最小公倍数．

程代展，齐洪胜．矩阵半张量积讲义，卷一：基本理论与多线性运算．科学出版社，北京，2020．

三种矩阵乘子

1. $$J_n := \frac{1}{n}\mathbf{1}_{n\times n}, n = 1, 2, \cdots .$$

2. $$(\Delta_n^U)_{i,j} = \begin{cases} 1,\ i = 1,\ \text{且} j = 1, \\ 0,\ \text{其他}. \end{cases}$$

3. $$(\Delta_n^D)_{i,j} = \begin{cases} 1,\ i = 1,\ \text{且} j = n, \\ 0,\ \text{其他}. \end{cases}$$

程代展, 齐洪胜. 矩阵半张量积讲义, 卷一: 基本理论与多线性运算. 科学出版社, 北京, 2020.

1. 几种矩阵乘积的回顾
   - 矩阵标准乘积定义及性质
   - 矩阵Kronecker积定义及性质
   - 矩阵Hadamard积定义与性质
   - 矩阵Khatri-Rao积定义与性质
2. 矩阵半张量积
   - 矩阵半张量积定义
   - 矩阵半张量积的性质
   - 矩阵半张量积的准交换性
   - 矩阵半张量积的应用领域
3. 进阶导读
   - 矩阵-矩阵半张量积
   - 矩阵-向量半张量积
   - 向量-向量的半张量积
   - 保维数的矩阵半张量积
   - 伪矩阵半张量积

定义3.2.1 （矩阵-向量半张量积）

令$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$，$X \in \mathcal{V}_k$，$t$为$n$ 与k的最小公倍数．那么，A在X上的作用被定义如下:

$$A \vec{\ltimes} X := (A \otimes I_{t/n})(X \otimes \mathbf{1}_{t/k}).$$

类似于矩阵-矩阵半张量积中的矩阵乘子，我们同样可以定义矩阵-向量半张量积中的向量乘子.

两种向量乘子

1. $$\gamma = \delta^U := \{\delta_n^1 | n = 1, 2, \cdots\}.$$
2. $$\gamma = \delta^D := \{\delta_n^n | n = 1, 2, \cdots\}.$$

定义3.2.2（矩阵-向量半张量积的一般定义）

设Γ为一矩阵乘子，γ为一向量乘子，$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$，$x \in \mathbb{R}^r$，$t$ 是n 与r 的最小公倍数．那么，A与x的关于Γ与γ的矩阵-向量半张量积(简称为“MV-STP”)，记作$\vec{\times}$，定义如下:

- 左MV-STP:

$$A\vec{\times}_l x := (A \otimes \Gamma_{t/p})(x \otimes \gamma_{t/r}). \tag{13}$$

矩阵-向量半张量积在变维系统中的应用

1. 一个离散时间的线性系统被定义如下:

$$\begin{aligned} & x(t+1) = A(t) \vec{\ltimes} x(t),\ \ x(0) = x_0, \\ & A(t) \in \mathcal{M}, x(t) \in \mathcal{V}. \end{aligned} \tag{14}$$

2. 一个连续时间的线性系统被定义如下:

$$\begin{aligned} & \dot{x}(t) = A(t) \vec{\ltimes} x(t),\ \ x(0) = x_0, \\ & A(t) \in \mathcal{M}, x(t) \in \mathcal{V}, \end{aligned} \tag{15}$$

其中$\mathcal{M} = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{m \times n}$ 和$\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$.

Cheng D Z. From dimension-free matrix theory to cross-dimensional dynamic systems, Elsevier, London, 2019.

1. 几种矩阵乘积的回顾
   - 矩阵标准乘积定义及性质
   - 矩阵Kronecker积定义及性质
   - 矩阵Hadamard积定义与性质
   - 矩阵Khatri-Rao积定义与性质
2. 矩阵半张量积
   - 矩阵半张量积定义
   - 矩阵半张量积的性质
   - 矩阵半张量积的准交换性
   - 矩阵半张量积的应用领域
3. 进阶导读
   - 矩阵-矩阵半张量积
   - 矩阵-向量半张量积
   - 向量-向量的半张量积
   - 保维数的矩阵半张量积
   - 伪矩阵半张量积

定义3.3.1 （向量-向量的半张量积定义）

设$x \in R^m$, $y \in R^n$, t为n 与m的最小公倍数, 则其半张量积可定义如下:

$$x \vec{\cdot} y := \left\langle (x \ltimes \mathbf{1}_{t/m}), (y \ltimes \mathbf{1}_{t/n}) \right\rangle,$$

这里, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是欧氏空间R^t 上的普通内积.

注4.3.1

向量-向量半张量积可用来定义泛维欧氏空间

$$R^\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

上的内积, 从而导出范数与之距离, 使R^∞ 成为一个道路连通的拓扑空间, 进而可构造微分流形结构.

1. 几种矩阵乘积的回顾
   - 矩阵标准乘积定义及性质
   - 矩阵Kronecker积定义及性质
   - 矩阵Hadamard积定义与性质
   - 矩阵Khatri-Rao积定义与性质
2. 矩阵半张量积
   - 矩阵半张量积定义
   - 矩阵半张量积的性质
   - 矩阵半张量积的准交换性
   - 矩阵半张量积的应用领域
3. 进阶导读
   - 矩阵-矩阵半张量积
   - 矩阵-向量半张量积
   - 向量-向量的半张量积
   - 保维数的矩阵半张量积
   - 伪矩阵半张量积

定义3.4.1 （保维数的矩阵半张量积Dimensional-keeping STP）

设$A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{p\times q}$. 那么，$A$与$B$的保维数的矩阵半张量积定义如下：

$$A \times B := \left(A \otimes \mathbf{1}_{t/n}^T\right)\left(B \otimes \mathbf{1}_{t/p}\right). \tag{16}$$

这里t为n 与p的最小公倍数.

注3.4.1

(i) 若$n=p$, 则$A \times B = AB$.

(ii) 事实上，A与B的保维数的矩阵半张量积可由如下公式计算：

$$A \times B := A\Psi_{n\times p}B. \tag{17}$$

其中$\Psi_{n\times p} = \left(I_n \otimes \mathbf{1}_{t/n}^T\right)\left(I_m \otimes \mathbf{1}_{t/p}\right) \in \mathcal{M}_{n\times p}$称为$n \times p$维桥矩阵（bridge matrix）.

(iii) 若$A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, 则$A \times B \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

问题3.4.1

保维数的矩阵半张量积有什么数学性质？它又有哪些应用呢？

定义3.4.2 （加权保维数矩阵半张量积）

设$A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{p\times q}$, t为n 与p的最小公倍数.

(i)

$$\xi = \{\xi_n \in \mathbb{R}^n_+ \mid \xi_1 = 1, \xi_n \neq \mathbf{0}_n, n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

(ii) A与B的加权保维数的矩阵半张量积（Weighted DK-STP）定义如下:

$$A \times^{\xi}_{\eta} B := \left(A \otimes \xi^T_{t/n}\right)\left(B \otimes \eta_{t/p}\right) := A\Psi^{\xi}_{\eta}B. \tag{18}$$

其中$\Psi^{\xi}_{\eta} = \left(I_n \otimes \xi^T_{t/n}\right)\left(I_m \otimes \eta_{t/p}\right) \in \mathcal{M}_{n\times p}$ 称为$n \times p$维加权桥矩阵.

注3.4.2

(i) 若$n = p$, 则$A \times^{\xi}_{\eta} B = AB$.

(ii) 加权保维数矩阵半张量积是保维数的矩阵半张量积推广.

问题3.4.2

加权保维数的矩阵半张量积有什么数学性质？它又有哪些特殊形式？

D. Cheng, X. Zhang, Z. Ji, From STP to Ψ-STP, CCC, 2024.

D. Cheng, X. Zhang, Z. Ji, C. Li, Observer-Based Realization of Control Systems, IEEE TAC, under review.

1 几种矩阵乘积的回顾
- 矩阵标准乘积定义及性质
- 矩阵Kronecker积定义及性质
- 矩阵Hadamard积定义与性质
- 矩阵Khatri-Rao积定义与性质

2 矩阵半张量积
- 矩阵半张量积定义
- 矩阵半张量积的性质
- 矩阵半张量积的准交换性
- 矩阵半张量积的应用领域

3 进阶导读
- 矩阵-矩阵半张量积
- 矩阵-向量半张量积
- 向量-向量的半张量积
- 保维数的矩阵半张量积
- 伪矩阵半张量积

定义3.5.1: 伪矩阵半张量积

给定矩阵$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{p\times q}$, $s = m \vee p$, $t = n \vee q$, 则矩阵A 与B 的伪矩阵半张量积定义为:

$$A \hat{\ltimes} B := \left(A \otimes E_{s/m\times t/n}\right) \times \left(B \otimes E_{s/p\times t/q}\right), \tag{19}$$

这里, $E_{u\times v} = \frac{1}{\sqrt{uv}}\mathbf{1}_{u\times v}$.

注3.5.1

(i) 当$m = n = p = q$ 时, $A \hat{\ltimes} B = AB$.

(ii) $A \hat{\ltimes} B$与$B \hat{\ltimes} A$维数相同, $\mathcal{M} = \bigcup_{m,n} \mathcal{M}_{m\times n}$任意维数矩阵的Lie代数.

问题3.5.1

伪矩阵半张量积与其它矩阵半张量积相比，有什么不同?

D. Cheng, From DK-STP to Non-square General Linear Algebra and General Linear Group, (preprint: http:arxiv.org/abs/2305.19794), 2023.

推荐网址及书目

- https://m-stp.lcu.edu.cn/
  http://lsc.amss.ac.cn/∼dcheng/stp/STP.zip
  http://lsc.amss.ac.cn/∼hsqi/soft/STP.zip
- 冯俊娥, 矩阵半张量积入门, 出版社: 山东大学出版社, 出版时间: 2024年8月.
- 程代展, 齐洪胜, 矩阵半张量积讲义卷一, 出版社: 科学出版社, 出版时间: 2020年11月.
- 程代展, 齐洪胜, 矩阵半张量积讲义卷二, 出版社: 科学出版社, 出版时间: 2022年2月.
- 程代展, 李长喜, 郝亚琦, 张潇, 矩阵半张量积讲义卷三, 出版社: 科学出版社, 出版时间, 2022年10月.
- 程代展, 纪政平, 矩阵半张量积讲义卷四, 出版社：科学出版社, 出版时间: 2023年3月.
- 程代展, 冯俊娥, 钟江华, 吴玉虎, 张奎泽, 矩阵半张量积讲义卷五, 出版社: 科学出版社, 出版时间: 2024年3月.

你能定义一种矩阵的乘积吗？
如何从映射的角度理解矩阵的乘积？

谢谢！